Марина Анатольевна Петрова
заместитель директора по УВР, учитель математики СОШ № 50, канд. пед. наук, доцент, эксперт по Рособрнадзору

Мониторинг результатов развития математической речи

Дидактами введены такие понятия, как сложность содержания учебного предмета и трудность содержания учебного предмета. Сложность является объективным свойством содержания учебного предмета и не зависит от подготовленности ученика. А трудность содержания учебного предмета представляет собой субъективную характеристику, связанную с уровнем подготовленности.

Процессуальные критерии отражают в большей степени непосредственно процесс формирования и развития субъектного опыта учащегося по освоению содержания учебного предмета. Субъектный опыт применительно к математике формируется и опосредуется декларативным знанием, процедурным знанием и *речью учащегося*. Сама речь учащегося при правильном ее формировании должна быть научной математической речью, в которой сочетаются как естественный язык, так и несколько математических языков: язык арифметики, алгебры, геометрии, абстрактных и пространственных понятий и т.д.

Использование в математике наряду с естественным нескольких математических языков, дает возможность развивать точную, экономную и информативную речь, умение отбирать наиболее подходящие языковые (в частности, символические, графические) средства.

Заметим, что повседневная практика работы не всегда позволяет учителю уделять много внимания формированию грамотной математической речи учащихся.

Включаясь в исследовательскую программу в рамках школьного проекта «Обучающиеся и язык в мультикультуре», учителя математики школы № 50 (рабочая группа в составе: М. А. Петрова, О. А. Устименко, О. С. Прохоренко, И. И. Иордан) поставили ряд задач, одна из которых – выделить и систематизировать темы программы, которые из года в год вызывают учебные трудности у большинства школьников, и на их основе разработать программу формирования математической речи учащихся. В результате коллективной аналитической работы был составлен каталог учебных трудностей и трудных тем. Анализ показал, что именно по этим темам у обучающихся не формируются те вычислительные навыки, которые следует отнести к процедурному знанию содержания каждой темы. Процедурное знание не представлено в их речи в полной мере. К подобным выводам члены рабочей группы пришли на основе диагностики обученности по четвертям/годам обучения и психологической диагностики, которую проводил наряду с учителями математики и школьный психолог.

Отметим, что мониторинг – это контроль с периодическим слежением за объектом мониторинга и обратной связью. Мониторинг позволяет управлять процессом учебной деятельности, соответственно и развивающей деятельности. Представленный мониторинг работы по программе развития математической речи позволяет провести исследование состояния развития математической речи обучающихся и составить диагностику.

Речь – деятельность человека, использующего язык в целях общения, выражения эмоций, оформления мысли, познания окружающего мира, для планирования своих действий и пр. Под речью понимают как сам процесс (речевая деятельность), так и его результат (речевые тексты, устные или письменные). Речь есть реализация языка, который обнаруживает себя только в речи [5].

Таким образом, математический язык – это совокупность всех средств, с помощью которых можно выразить математическое содержание. К таким средствам относятся логико-математические символы, графические схемы, геометрические чертежи, система научных терминов вместе с элементами естественного (обычного) языка. В свою очередь, математическая речь – это вид речи, выражающий содержание в виде символьных (математических символов, латинского, греческого языка и т.д.) и графических обозначений (таблицы, диаграммы и т.д.), математических моделей (уравнения, неравенства, их системы, графы и т.д.) вместе с элементами визуализации (графики, схемы, чертежи и т.д.) и естественного языка.

По мнению Л. С. Выготского, речь выполняет две функции – коммуникативную и мыслительную.

В свою очередь:

- развитие речи человека невозможно без развития его мышления;
- овладение речью возможно только в речевом общении, причем личностно значимом для обучающегося;

- для развития речи необходимо развивать всё её виды: внешнюю и внутреннюю, внешняя речь включает письменную и устную (диалогическую и монологическую);
- развитие речи, как и всех психических процессов, возможно только в деятельности.

Педагоги-математики под математической речью понимают устную и письменную речь на основе «полуформального» математического языка (В. Н. Худяков) или некий набор характеристик речи школьника: использование математического языка и его символики, точность, кратность, логическая полнота и обоснованность рассуждений (Б. Д. Гнеденко, А. Я. Хинчина и др.).

Критериями математической речи являются: точность, логичность, ясность, доступность, чистота, выразительность, богатство, уместность.

Д. В. Шарминым [6] показано, что такие критерии как правильность, точность, логичность и уместность математической речи можно рассматривать как её базовые коммуникативные качества, т.е. как некоторый минимальный набор коммуникативных качеств, по совокупности которых можно судить об уровне сформированности культуры математической речи учащихся в целом.

А. С. Горчаков выделяет другие критерии развития математической речи школьников:

- содержательность, поскольку основной функцией математической речи является передача информации;
- осознанность, осмысленность речи, показывающая, насколько ученик понимает то, о чём говорит;
- доказательность, логичность высказываний;
- владение математическим языком: его алфавитом, синтаксисом и семантикой.

А. С. Горчаковым выделены также качества математической речи: содержательность, понимание, владение математическим языком и математической символикой, владение логической составляющей математической деятельности.

Связующим звеном между речью, мышлением и языком в речевом мышлении является понимание смысла передаваемого содержания.

Математический язык является в действительности расширением естественного языка, в основном за счёт символики и дополнительной лексики. Лучшему пониманию сущности языка математики способствует выделение отдельных его компонентов.

А. А. Столяр в математическом языке выделяет два компонента: язык данной математической теории (каждый раздел математики пользуется своим особым языком) и логический язык, состоящий из терминов и символов, обозначающих логические операции, используемые для конструирования предложений и для вывода одних предложений из других.

Дж. Икрамов называет такие компоненты математического языка: слова, словосочетания, символы, предложения, тексты.

Детальный анализ показывает, что А. А. Столяр рассматривает компоненты математического языка в русле семиотического подхода к понятию языка, тогда как Дж. Икрамов в большей степени руководствуется лингвистическим подходом. Две данные классификации не противоречат друг другу, а отражают разные стороны понятия языка математики [7].

На основе их исследований нами на практике в школе № 50 проводились занятия по математике с целью развития математической речи обучающихся и сделаны мониторинговые измерения.

В качестве основных критериев, по которым оценивалась математическая речь обучающихся, рассматривались следующие [1]:

- содержательность речи;
- осознанность, осмысленность речи;
- доказательность, логичность высказываний;
- владение математическим языком: его алфавитом, синтаксисом и семантикой.

Результаты оценивались нами по различным направлениям:

- наличие в устной и письменной речи учащихся смысловой компоненты;
- правильное употребление математических терминов, символов;
- правильное построение устных и письменных высказываний;
- качество знаний и уровень владения учебным материалом при решении задач, которые неявно показывают и уровень мыслительной деятельности школьников.

Для диагностики указанных компонентов нами были использованы методики, применяемые в школьном обучении, а также описанные в работах [2, 3]. Сравнение результатов экспериментальных (ЭК) и контрольных (КК) классов проводилось по результатам выполнения обучающимися диагностических заданий.

Математическая речь учащихся ЭК и КК проводилось по итогам выполнения обучающимися диагностических заданий, а итоговая диагностика – в виде контрольной работы. Например, тема «Четырёхугольники», на этот момент написаны контрольные работы по решению задач, изучен предусмотренный программой материал и завершён определённый этап работы по формированию математической речи обучающихся.

Целью проведения проверочной работы мы ставили выявление уровня сформированности отдельных речевых умений. Задания проверочной работы проверяли не только умение работать с основными дидактическими единицами, но и навык использования полученных знаний и умений при решении задач и выполнении заданий, в которых наиболее активно используется математическая речь как устная, так и письменная.

В каждом задании ученику необходимо было обосновать их ответ так, как они считают нужным.

Часть 1

1. Проанализируйте рисунок и запишите информацию о четырёхугольнике, данном на рисунке ($EC = CF$, $EA = AF$, диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны, диагональ AC является биссектрисой угла ECF).

2. Сформулируйте свойство ромба, которым не обладает произвольный параллелограмм, в условном виде. («Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны» или «Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали являются биссектрисами его углов»).

3. В параллелограмме противоположные стороны попарно равны. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно? Почему? (Если в четырёхугольнике стороны попарно равны, то он является параллелограммом. Это утверждение верно, поскольку является признаком параллелограмма).

4. Верно ли, что если в четырёхугольнике диагонали равны, то он – прямоугольник? Почему? (Не верно, приводится пример четырёхугольника, диагонали которого точкой пересечения не делятся пополам, или указывается, что этого условия не хватает).

5. Является ли фигура задачи 1 ромбом? Параллелограммом? (Не является ромбом; так как не все его стороны равны, не является параллелограммом, так как противолежащие стороны не равны попарно).

Часть 2

6. Могут ли основания трапеции быть равными? (Не могут, так как в этом случае в четырёхугольнике две стороны были бы параллельны и равны, т.е. он являлся бы параллелограммом по признаку).

7. Может ли какое-либо свойство квадрата не выполняться для ромба? (Может, например, диагонали ромба не равны, а квадрата – равны).

8. Верно ли утверждение: любой прямоугольник является параллелограммом, но не любой параллелограмм – прямоугольником? (Верно, так как прямоугольник является параллелограммом по определению, но есть параллелограммы, не являющиеся прямоугольниками – это любые параллелограммы, у которых хотя бы один угол не равен 90 градусам).

9. Дано свойство: «Параллелограмм имеет центр симметрии». Это свойство верно для всех параллелограммов, для некоторых параллелограммов, или неверно ни для одного параллелограмма? (Это свойство верно для всех параллелограммов, так как мы доказывали его на уроке для произвольного параллелограмма).

10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит прямые углы A и C пополам. Каким ещё свойством должны обладать углы этого четырёхугольника, чтобы он был квадратом? (Это свойства достаточно, так как эта диагональ делит четырёхугольник на два треугольника, в каждом из которых два угла по 45 градусов, а значит, они прямоугольные и равнобедренные, т.е. $ABCD$ – квадрат).

Часть 3

11. Сформулируйте определение ромба. Используя в качестве родового понятия четырёхугольник (Ромбом называется четырёхугольник, у которого все стороны равны).

12. Можно ли определить квадрат как четырёхугольник с равными и перпендикулярными диагоналями? (Нельзя, так как этих условий не достаточно, можно привести контрпример: четырёхугольник, диагонали которого обладают таким свойством, но точкой пересечения не делятся пополам).

13. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B + \angle C + \angle D = 270°$. Найдите тупые углы параллелограмма (Так как в параллелограмме $ABCD$ углы B и D равны, и сумма двух разных углов параллелограмма (например, B и C) равна 180°, то получается, что угол D меньше 90°, т.е. тупые углы – A и C).

14. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$, $BO = OD$. Из трёх данных условий необходимо удалить одно так, чтобы двух оставшихся условий было достаточно для доказательства того, что $ABCD$ – параллелограмм. Определите, какое из данных условий удалять нельзя. (Условие равенства отрезков BO и OD можно удалить из данных трёх условий, так как по первым двум условиям $ABCD$ является параллелограммом по признаку: две стороны AB и CD равны, а так как равны, то и прямые AB и CD параллельны по признаку параллельности прямых. Ни одно из первых двух условий нельзя убрать, так как двух оставшихся будет недостаточно для выполнения одного из признаков параллелограмма).

15. Квадрат разрезали по двум осям симметрии так, что каждая из полученных частей имеет одну ось симметрии. Как проходят оси симметрии, по которым разрезали квадрат? (Эти оси симметрии проходят по диагоналям квадрата, так как в этом случае при разрезании получаются два прямоугольных равнобедренных треугольника, имеющих одну ось симметрии. Если бы разрезание произошло по прямым, проходящим через середины сторон квадрата, то в результате получились бы четыре квадрата, каждый из которых имеет четыре оси симметрии).

За каждое правильно решённое и обоснованное задание первой части – 1 балл, второй – 1 балл, третьей – 2 балла. Максимальное количество баллов – 20.

Контрольные классы общей численностью 77 человека. Экспериментальные классы – 50 человек.

Время выполнения заданий ограничивалось 45 минутами. Каждому ученику выдавались листы с заданиями. Ответ на вопрос ученики должны были дать полный, развёрнутый, чётко сформулированный. Ответ, содержащий неполное объяснение, в заданиях частей 1 и 2 оценивался как неверный, в заданиях части 3 – 0 или 1 балл в зависимости от полноты. В инструкции к выполнению проверочной работы указывалось, что выполнение заданий может осуществляться в любом порядке, каждый ответ должен быть объяснён настолько подробно, насколько считает ученик.

Результаты выполнения заданий приведены в таблице:

Задания			КК (77 чел.)		ЭК (50 чел.)	
			Количество учащихся, справившихся с заданием	%	Количество учащихся, справившихся с заданием	%
Часть 1	1		66	86	49	98
	2		68	88	48	96
	3		72	94	49	98
	4		65	84	47	94
	5		67	87	47	94
Часть 2	6		66	86	46	93
	7		67	87	46	92
	8		32	42	30	60
	9		58	75	37	74
	10		34	44	23	46
Часть 3	11	1б	29	38	21	42
		2б	26	34	18	36
	12	1б	54	70	38	76
		2б	49	64	29	58
	13	1б	35	45	26	52
		2б	31	40	26	52
	14	1б	55	71	37	74
		2б	37	48	27	54
	15	1б	32	42	28	56
		2б	20	26	26	52

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в контрольном классе речевые умения сформулированы недостаточно. Можно предположить, что это объясняется отсутствием целенаправленной работы по развитию математической речи школьников. В целом, уровень сформированности речевых умений в экспериментальном классе значительно выше, чем в контрольном классе.

Целью проведения проверочной работы ставилось сравнение качества знаний учащихся контрольного и экспериментального классов и уровня владения математической речью при формулировании математических предложений и ответах на вопросы.

Для оценки различий полученных результатов при выполнении проверочной работы в ЭК и КК воспользуемся статистической обработкой данных. Учитывая цели работы, для статистической обработки данных можно воспользоваться медианным критерием. Медианный критерий применяется для выявления различия состояния некоторого свойства в двух совокупностях на основе изучения членов двух выборок из этих совокупностей. В этом случае показателем тенденции изменения некоторого свойства служит медиана изменения изучаемого свойства в каждой из выборок [4]. В нашем случае исследуемое свойство – развитие математической речи школьников.

В условиях проведённого эксперимента выполняются основные допущения медианного критерия [4], который и применим для проверки данного предположения.

1. Контрольные классы выбраны случайным образом.
2. Контрольные и экспериментальные классы являются независимыми.
3. Для анализа результатов использовалась интервальная шкала и шкала отношений, т.е. шкалы выше порядковой.
4. Число членов в обеих выборках больше 20.

Ряды распределения учащихся ЭК и КК по числу баллов, полученных за выполнение работы, использовались в качестве показателей развития математической речи школьников и усвоения знаний учащихся. Представим данные учащихся обеих выборок в форме таблице для более удобного подсчёта медианы.

Число баллов	Количество учащихся, получивших это число баллов			Накопленная частота
	в ЭК	в КК	всего	
20	2	1	3	123
19	1	0	1	120
18	3	1	4	119
17	7	2	9	115
16	8	4	12	106
15	7	7	14	94
14	9	9	18	80
13	5	14	19	59
12	2	12	14	30
11	2	10	12	14
10	2	11	13	27
9	2	3	5	10
8	0	2	2	3
7	0	1	1	1
	$n_1 = 50$	$n_2 = 77$		

Имеем две совокупности: ЭК и КК. Пусть X характеризует состояние исследуемого свойства в ЭК, а Y – состояние этого свойства в КК. Обозначим $X[i]$, $Y[i]$ – результаты измерения свойства у учащихся ЭК и КК соответственно, т.е. $X[i]$ и $Y[i]$ – это число баллов, полученных одним учащимся.

Примем за $N = n_1 + n_2$, т.е. $N = 127$ человек – объём объединённой выборки.

Найдём медиану рассматриваемой выборки, то есть такое значение, больше которого 50 % измерений $X[i]$ и $Y[i]$, и меньше которого также 50 %.

Иными словами, если все $X[i]$ и $Y[i]$ расположить по возрастающей, то медиана будет равна:

$$m = \left[\frac{\frac{Z(N+1)}{2}, \text{если } N - \text{нечётное}}{\frac{Z\frac{N}{2} + Z\left(\frac{N}{2}+1\right)}{2}, \text{если } N - \text{чётное}} \right]$$

где $Z[i] = X[i]$ или $Y[i]$.

Сформулируем проверяемую гипотезу:

H_0 (нулевая гипотеза): медиана распределения учащихся по числу баллов, полученных за выполнение работы, одинаковы в совокупности учащихся ЭК и КК.

H_1 (альтернативная гипотеза): медианы различны.

Вычисляя, получаем $T = 8{,}55$. Для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ и одной степени свободы по таблице Г [4, с. 130] находим $T_{крит} = 6{,}64$. Итак, получаем, что верно неравенство $T > T_{крит}$ ($8{,}55 > 6{,}64$), а значит в соответствии с правилом принятия решения при использовании медианного критерия [4, с. 73–74] нулевая гипотеза отклоняется и с вероятностью 99 % принимается альтернативная гипотеза: медиана распределения учащихся по числу баллов за выполнение проверочной работы различны в ЭК и КК. При этом результаты учащихся ЭК имеют тенденцию быть выше результатов учащихся КК, т.е. уровень развития математической речи существенно выше у ЭК.

Итак, более высокие результаты диагностики свидетельствуют о более высоких показателях качества знаний и уровня развития математической речи у учащихся экспериментальной группы. Статистическая обработка результатов показала значимость наблюдаемых различий.

Таким образом, высказанная нами гипотеза о влиянии методики обучения на уровень развития математической речи учащихся в процессе выделения и систематизации тем программы, которые из года в год вызывают учебные трудности у большинства школьников, подтверждена.

Сравнение результатов диагностики, проведённые у учащихся на начало работы по развитию математической речи, показало, что систематическое и целенаправленное развитие математической речи школьников с течением времени способствует значительному увеличению успешности изучения математической речи и учебного материала в целом: как в предметной, так и в смысловой его части.

В беседах с учителями отмечалось, что при изучении смежных дисциплин (в том числе физики, химии и биологии) отмечалось более успешное понимание сложно воспринимаемых понятий, что способствовало более успешному усвоению изучаемого материала. При дальнейшем изучении математики в старших классах у учеников экспериментальных классов отмечалось более уверенное владение математической символикой и понимание структур новых объектов и взаимосвязей между ними.

Наша целенаправленная работа обеспечивает:

- речевую деятельность ученика как субъекта познания;
- единство мышления, языка и речи;
- понимание и осознание смысла изучаемого;
- рефлексию собственной деятельности;
- владение математическим языком и математической символикой;
- владение логической составляющей математической деятельности.

Эти условия носят системный характер. Они органично взаимосвязаны, взаимообусловлены, взаимнопредопределены, взаимодополняемы.

Качествами математической речи школьников являются:

- содержательность, поскольку основным назначением речи является передача информации, то одним из важнейших качеств математической речи является именно её информативность;
- понимание смысла предметного содержания, которое является связующим звеном между мышлением, математической речью и математическим языком;
- владение математическим языком и математической символикой;
- владение способами построения математических высказываний;
- владение логической составляющей математической деятельности.

Критериями математической речи школьников являются: содержательность; осознанность, осмысленность речи; доказательность, логичность высказываний; владение математическим языком (его алфавитом, синтаксисом и семантикой).

В развитии математической речи школьников можно выделить три основных этапа.

Первый этап – процесс обучения новым знаниям. Он важен потому, что, во-первых, на уроках изучения нового происходит первое знакомство с предметным содержанием, которое составляет предметную основу математической речи обучающихся.

Во-вторых, в процессе изучения нового материала ученик овладевает основами математической речи. Слушая грамотную математическую речь учителя (содержательную, логичную, обоснованную, осознанную, осмысленную, с грамотным употреблением математического языка и символики), он и сам приобщается к такой речи, получает первый опыт рассуждений, высказывает свои мысли в сотрудничестве с учителем и другими учениками.

Второй этап – это уроки решения более сложных задач. На них ученик использует опыт «говорения», полученный на предшествующих уроках и развивает его. На таких уроках его внутренняя, внешняя, письменная речь более самостоятельны.

Третий этап состоит в том, что дальнейшее развитие математической речи ученика происходит в самостоятельной деятельности.

Основным средством развития математической речи и в целом речевого мышления, включения ученика в речевую деятельность являются специальным образом сформулированные задания и вопросы, т.е. упражнения.

Таким образом, к образовательным целям следует отнести как передачу обучаемым конкретных математических знаний (математические термины, символы, понятия и др.), так и формирование у них определенных умений и навыков (умение оперировать понятиями, применять символы в письменной речи и др.). Кроме того, особое внимание следует уделить выработке у обучаемых умений математического моделирования различных практических ситуаций и решения ими возникающих таким образом математических задач (формирование умения оперировать такими средствами как схемы, графики, диаграммы и др.).

К развивающим целям относится развитие взаимодействия устной и письменной математической речи учащихся, осознание ими межпредметных, межязыковых связей. Воспитание культуры математической речи, культуры общения, умения вести диалог, в том числе с использованием математической речи, следует отнести к личностно-развивающим целям методики.

К общим коммуникативно-речевым умениям можно отнести: умение ориентироваться в условиях общения, умение ставить коммуникативные задачи, умение планировать речевые действия, умение реализовать замысел речи, умение осуществлять контроль за речью.

К частным коммуникативно-речевым умениям нами отнесены: умение читать математический текст, умение пользоваться элементами письменной математической речи (символами, формулами, схемами и др.), умение слушать математический язык, умение говорить на языке математики, умение высказывать суждения, комментировать, доказывать (с учётом предметного математического материала).

Формированию культуры математической речи может способствовать специально разработанная система задач, в которую целесообразно включать следующие задания:

1. Задания, предназначенные для работы с терминологией, символикой и графическими изображениями.
2. Задания, предназначенные для работы со словесно-логическими конструкциями математического языка.
3. Задания, предназначенные для работы с письменными обучающими текстами по математике.

Также подтвердилось замечание дидактов, что сложность является объективным свойством содержания учебного предмета и не зависит от подготовленности ученика. А трудность содержания учебного предмета представляет собой субъективную характеристику, связанную с уровнем подготовленности.

Литература

1. *Горчаков А. С.* Качества математической речи школьников и критерии её развития // Современное образование, научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Артёмовские чтения» / под общ. ред. М. А. Родионова. – Пенза, 2012. – Т. 1. – С. 99–102.

2. *Горчаков А. С.* Критерии и качества математической речи школьников // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 14: Периодический межвузовский сборник научно-методических работ. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2012. – С. 376–384.

3. *Горчаков А. С.* Критерии развития математической речи школьников // Педагогические технологии математического творчества: сборник статей участников Международной научно-практической конференции. – Арзамас: АГПИ, 2011. – С. 74–79.

4. *Грабарь М. И., Краснянская К. А.* Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. – М.: Педагогика, 1977. –136 с.

5. Педагогическое речеведение: словарь-справочник / А. А. Князьков; под ред. Т. А. Ладыженской, А. К. Михальской. – М.: Наука, Флинта, 1998. – 312 с.

6. *Шармин Д. В.* Определение уровня культуры математической речи учащихся // Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета». Вып. 2006.

7. *Далингер В. А.* Развитие математической речи учащихся при обучении математике // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 6. – С. 83–85.