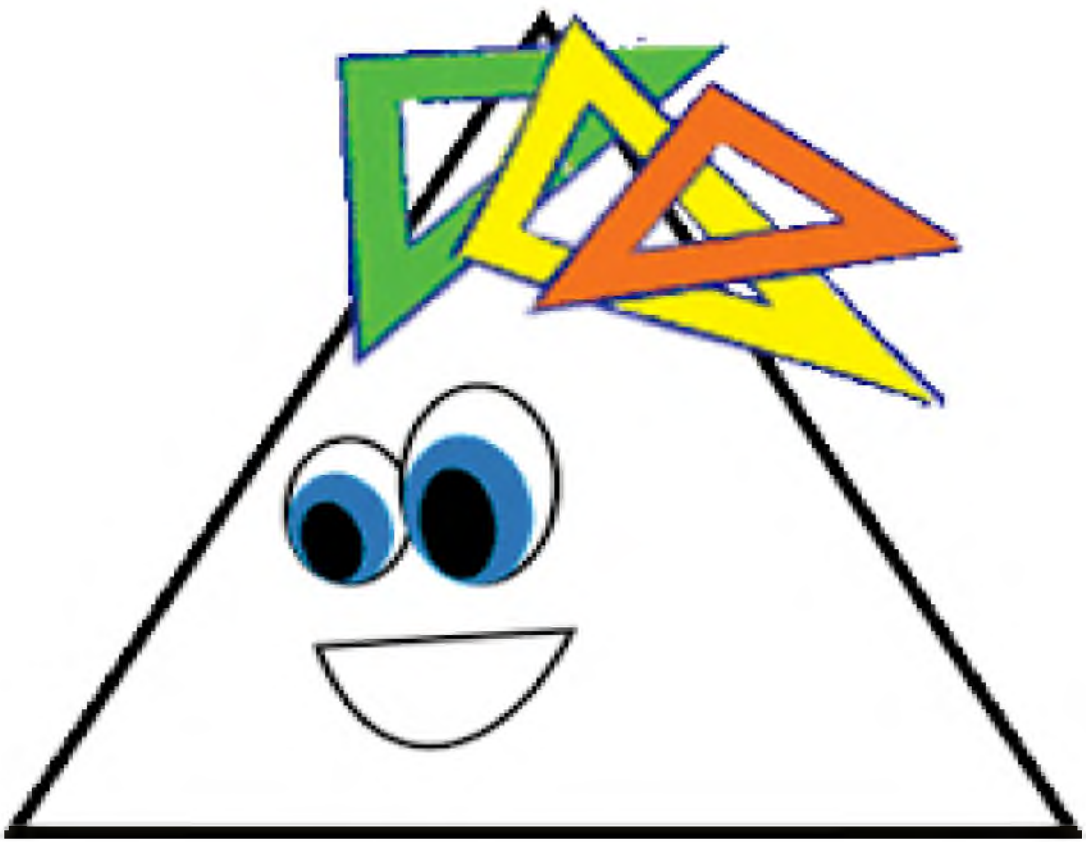
МАОУ Вторая гимназия

Предметно-методическая мастерская
«Решение задач по планиметрии в курсе ЕГЭ»

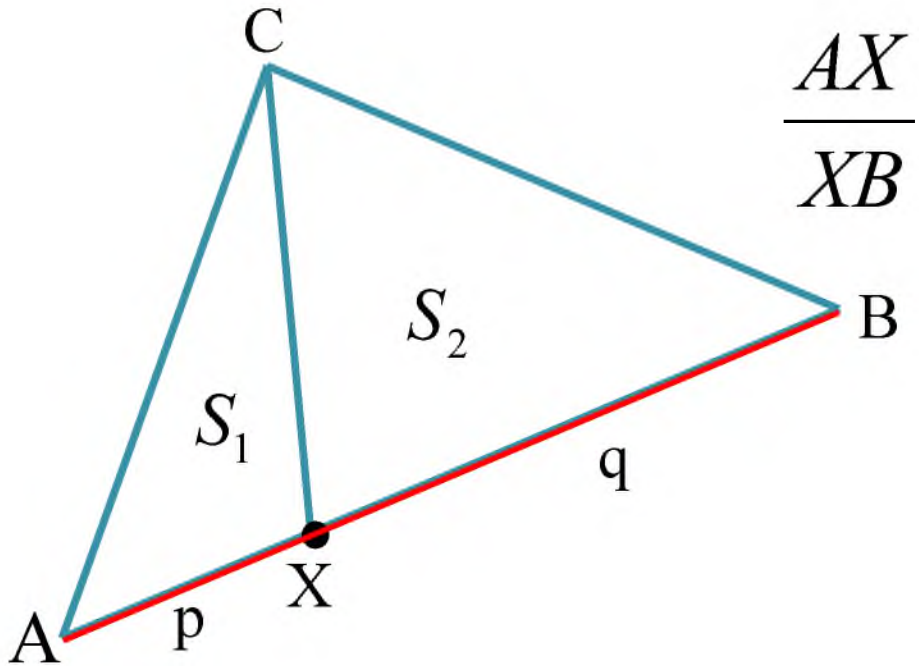
- Попова О.В., учитель математики высшей квалификационной категории
- Макарова С.А., учитель математики высшей квалификационной категории

Занятие № 1

Отношение отрезков и площадей



Утверждение1. Если точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении p:q, то отрезок CX делит треугольник на части, отношение площадей которых также равно p: q



$$\frac{AX}{XB}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{p}{q}$$

Утверждение 2. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника

Утверждение 3. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам

Задача ЕГЭ.

Точки B_1 *и* C_1 *лежат на сторонах* AC *и* AB *треугольника* ABC, *причём* $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. *Прямые* BB_1 *и* CC_1 *пересекаются в точке* O.

а) Доказать, что прямая AO *делит пополам сторону* BC;

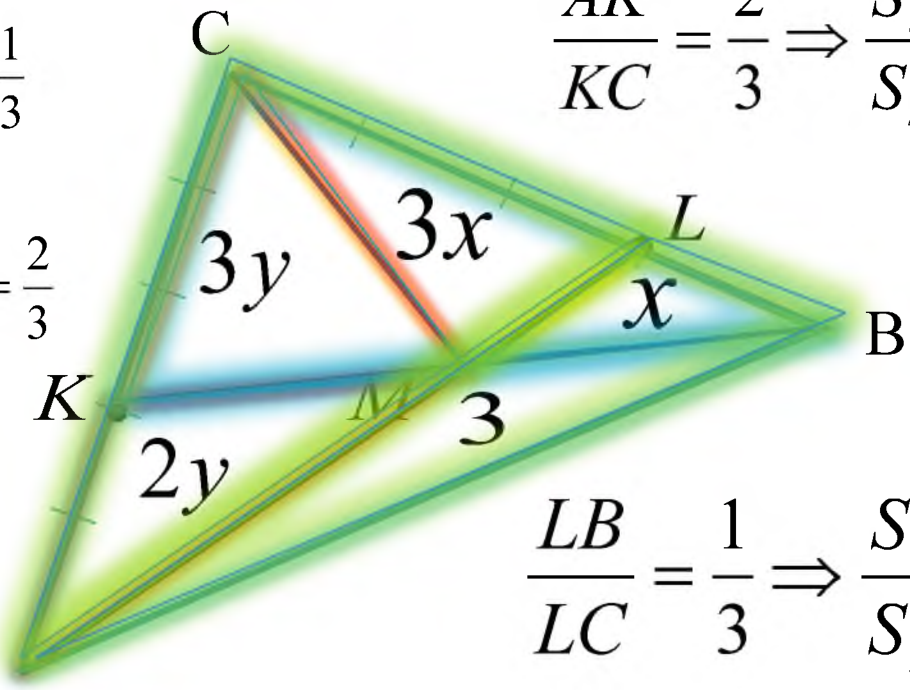
б) Найти отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 *к площади треугольника* ABC,

если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1:3$

Задача. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка L, причём $BL : LC = 1:3$. А на стороне AC – точка K, так что $AK : KC = 2:3$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $ABM = 3$, где точка M – точка пересечения прямых BK и AL

$$\frac{BL}{LC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{S_{\Delta BLM}}{S_{CLM}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AK}{KC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{S_{\Delta AMK}}{S_{\Delta CMK}}=\frac{2}{3}$$



$$\frac{AK}{KC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{S_{\Delta ABK}}{S_{\Delta BKC}}=\frac{2y+3}{3y+4x}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{LB}{LC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{S_{\Delta ABL}}{S_{\Delta ALC}}=\frac{3+x}{5y+3x}=\frac{1}{3}$$

$$S_{\Delta ABC}=5y+4x+3=16{,}5$$

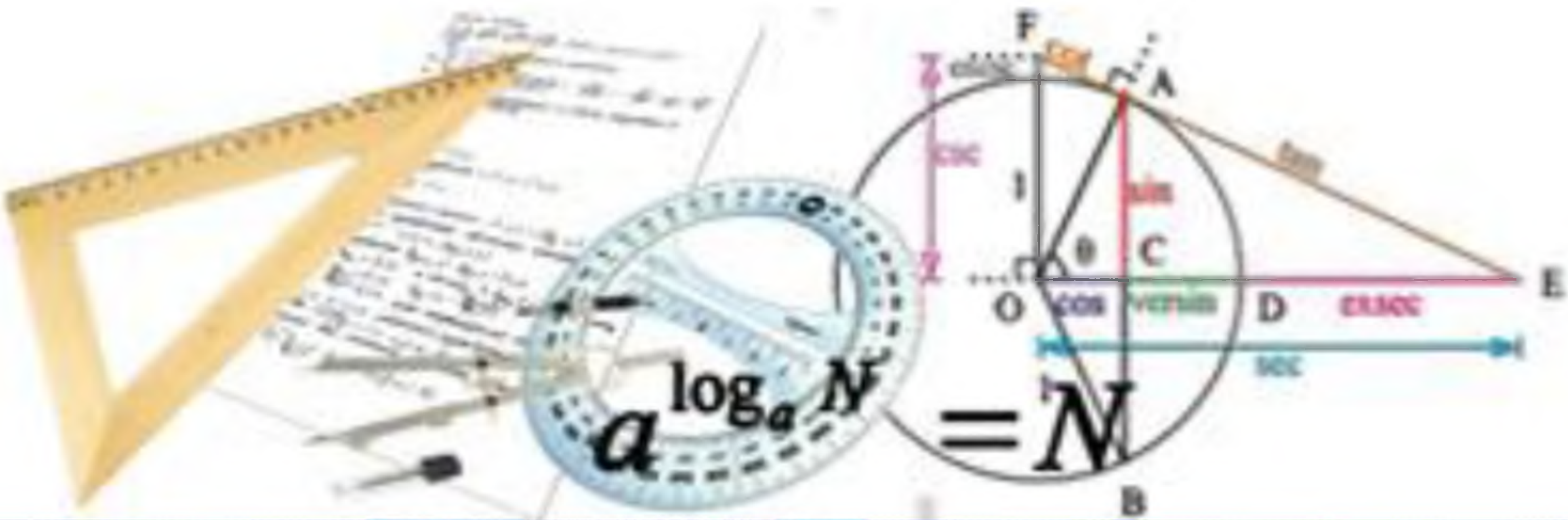
$$x=\frac{9}{8};\quad y=\frac{9}{5}$$

МАОУ Вторая гимназия

Предметно–методическая мастерская
«Решение задач по планиметрии в курсе ЕГЭ»

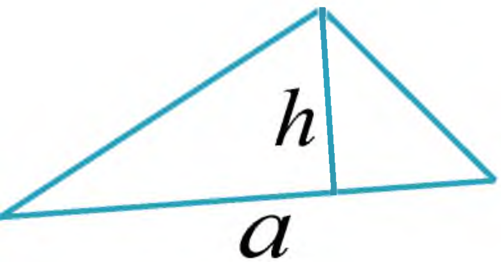
- Попова О.В., учитель математики высшей квалификационной категории
- Макарова С.А., учитель математики высшей квалификационной категории

Занятие № 2
Задачи на площадь

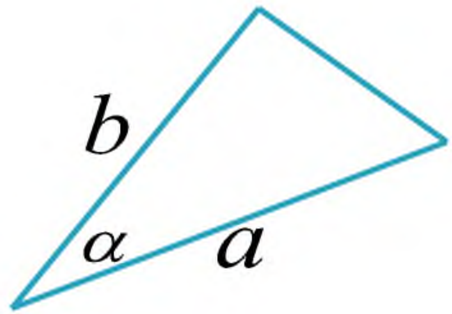


Теория

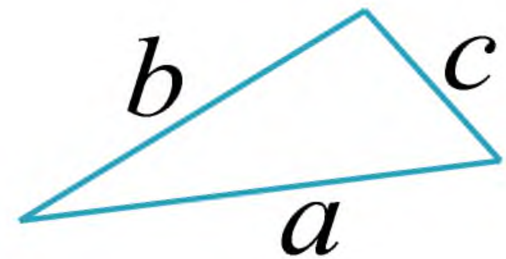
Треугольник



$$S = \frac{1}{2} ah$$

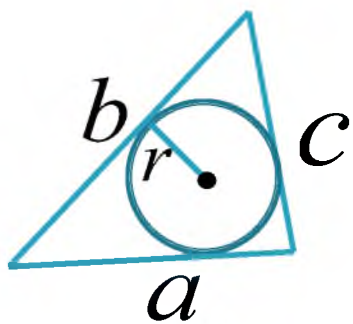


$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

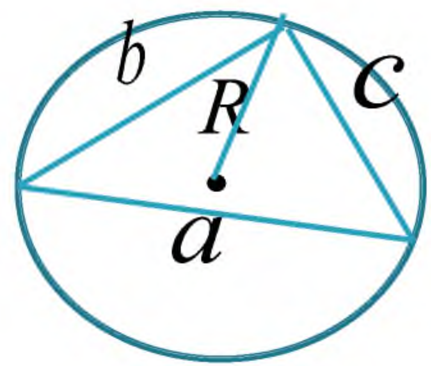


$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



$$S = \frac{1}{2} \mathrm{Pr}$$



$$S = \frac{abc}{4R}$$

Четырехугольники

выпуклые

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

невыпуклые

параллелограмм

$$S = ah$$

$$S = ab\sin\alpha$$

трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} h$$

прямоугольник

$$S = ab$$

ромб

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

квадрат

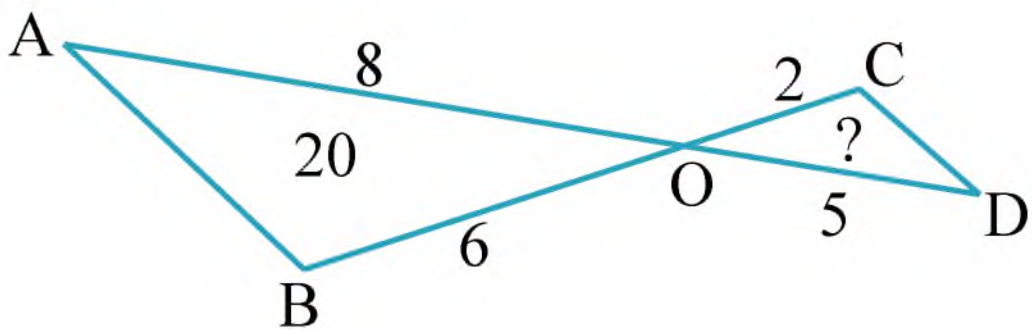
$$S = a^2$$

Важная теорема 1

- Площади треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения сторон, содержащих этот угол

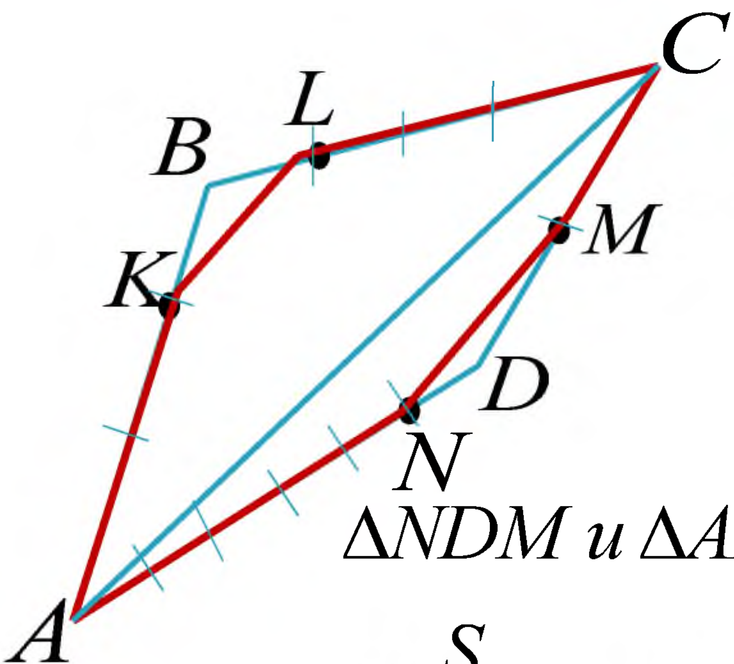
Задачи для устной работы

Задача 1.



Задача 2. M – середина AB. MB = 4 см, AK = 4 см, AC = 12 см. Найти S_{BCKM}, если $S_{AMK} = 16$ см^2.

Задача. Площадь выпуклого четырехугольника равна единице На сторонах взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD, N на DA. При этом AK/KB=2, BL/LC=1/3, CM/MD=1, DN/NA=1/5. Найдите площадь шестиугольника AKLCMN.



$$\Delta BKL \text{ и } \Delta ABC \text{ имеют общий } \angle B$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BKL}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BK \cdot BL}{AB \cdot AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$S_{\Delta BKL} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}$$

$$\Delta NDM \text{ и } \Delta ADC \text{ имеют общий } \angle D$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta NDM}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{DN \cdot DM}{AD \cdot DC} \Rightarrow S_{\Delta NDM} = \frac{1}{12} S_{\Delta ADC} = \frac{1}{12}$$

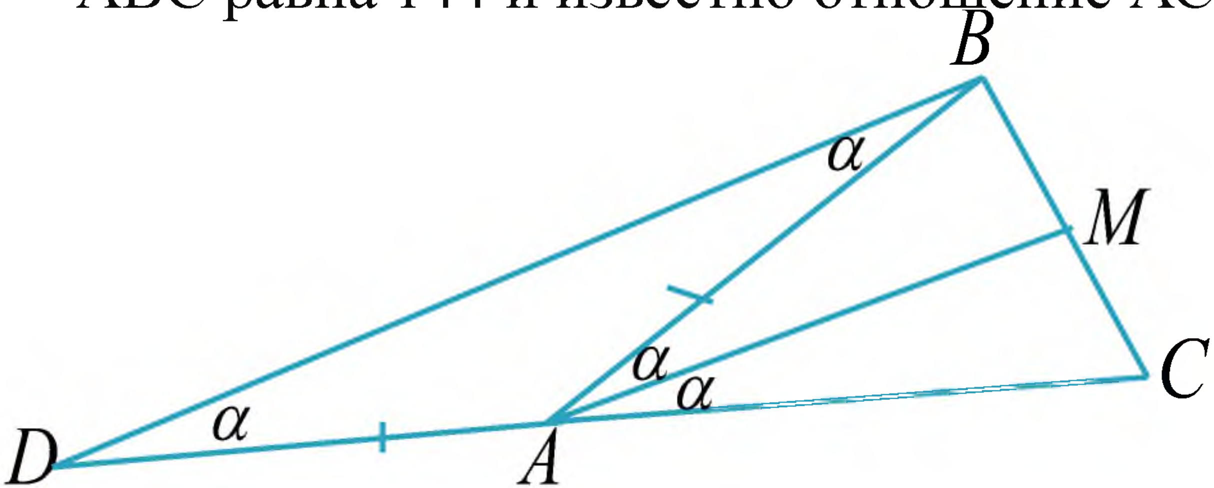
$$S_{AKLCMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta BKL} - S_{\Delta NDM} = \frac{5}{6}$$

Задача 1(ЕГЭ)

На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM- биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции AMBD, если площадь треугольника ABC равна 144 и известно отношение AC:AB =3:1

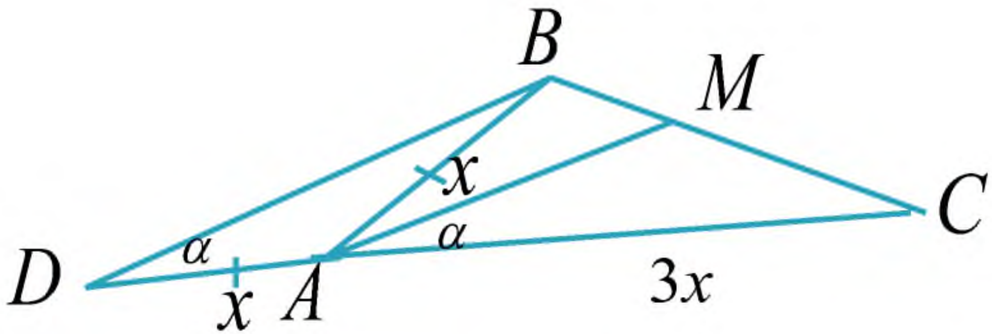


$$a)\,\Delta DAB\ \textit{равнобедренный} \Rightarrow \angle BDA = \angle ABD = \alpha$$

$$\angle BAC - \textit{внешний к}\ \Delta DAB \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$$

$$MA\,//\,BD \Rightarrow \angle BDA = \angle MAC = \alpha\ (\textit{соответственные})$$

$$\Rightarrow \angle BAM = \angle MAC = \alpha \Rightarrow AM - \textit{биссектриса}$$



$$б)\ \frac{AC}{AB}=\frac{3}{1}.\ \textit{Пусть}\ AB=AD=x,\ \textit{тогда}\ AC=3x$$

$$Т.к.\ \angle BAM=\angle CAM \Rightarrow \frac{S_{\Delta BAM}}{S_{\Delta CAM}}=\frac{AB\cdot AM}{AC\cdot AM}=\frac{1}{3}$$

$$S_{\Delta ABC}=144 \Rightarrow S_{\Delta CAM}=\frac{3}{4}\cdot 144=108$$

$$\Delta AMC \propto \Delta DBC\ (\textit{по двум углам}),\ k=\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta DBC}}=\frac{9}{16}\Rightarrow S_{\Delta DBC}=192$$

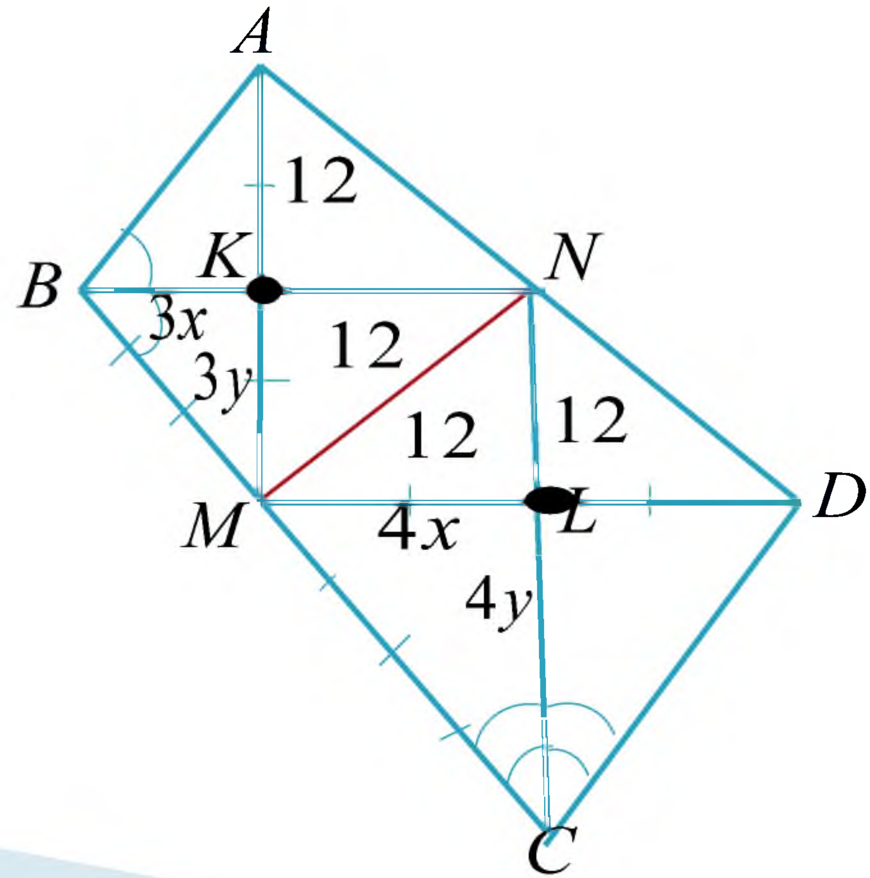
$$S_{AMBD}=S_{\Delta DBC}-S_{\Delta AMC}=192-108=84$$

Задача 2 (ЕГЭ)

Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$, пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 24.



Важная теорема 2

Площади треугольников, имеющих одинаковую высоту, относятся как основания, к которым проведена эта высота.

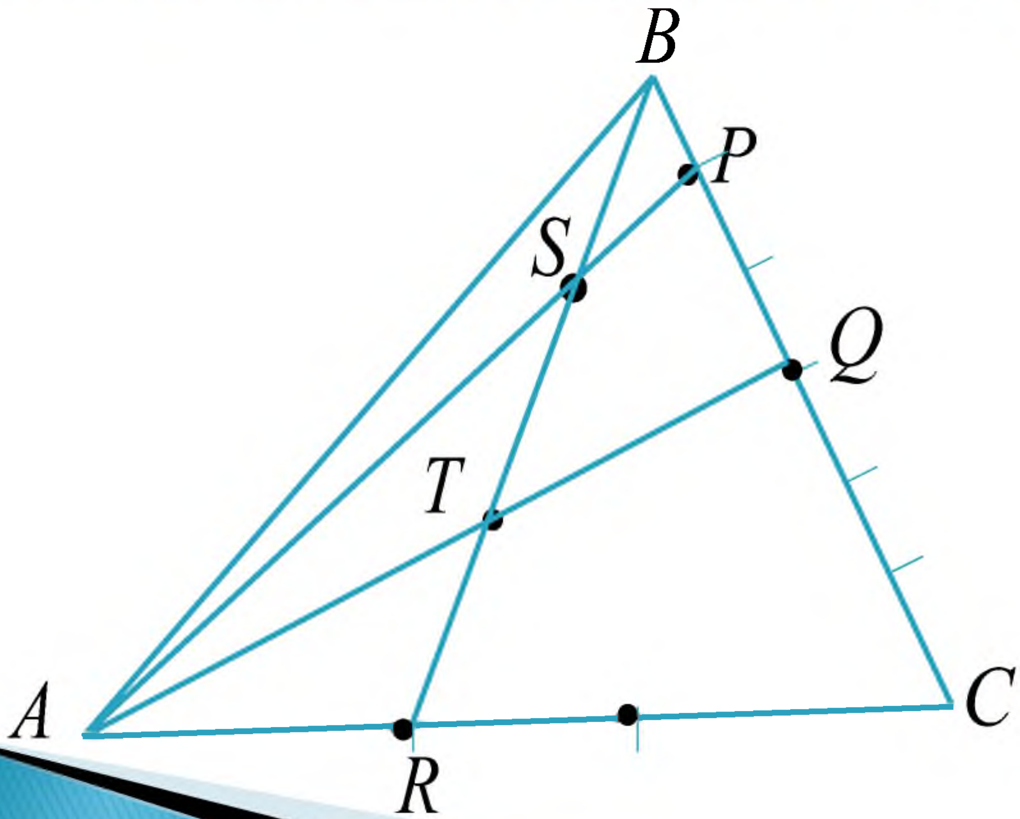
Задачи для устной работы

Задача 3(ЕГЭ)

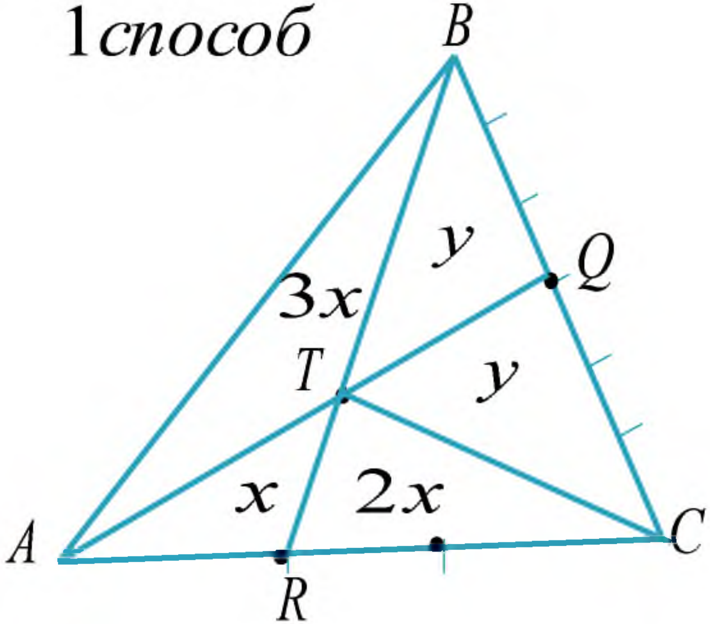
Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP:PQ:QC = 1:2:3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR:RC = 1:2$. Точки S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AP и AQ соответственно.

а) Докажите, что площади треугольников ABS и AST равны

б) Найдите отношение площади четырехугольника PQTS к площади треугольника ABC.

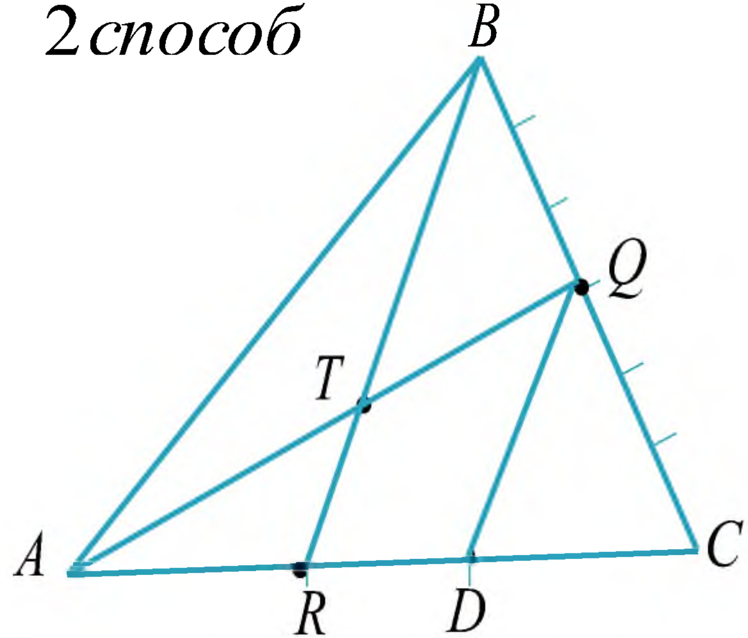


1 способ



$$\frac{RT}{TB} = \frac{1}{3} \Rightarrow RT = \frac{1}{4} BR$$

2 способ



DQ – средняя линия $\Delta BRC \Rightarrow$

$$DQ = \frac{1}{2} BR$$

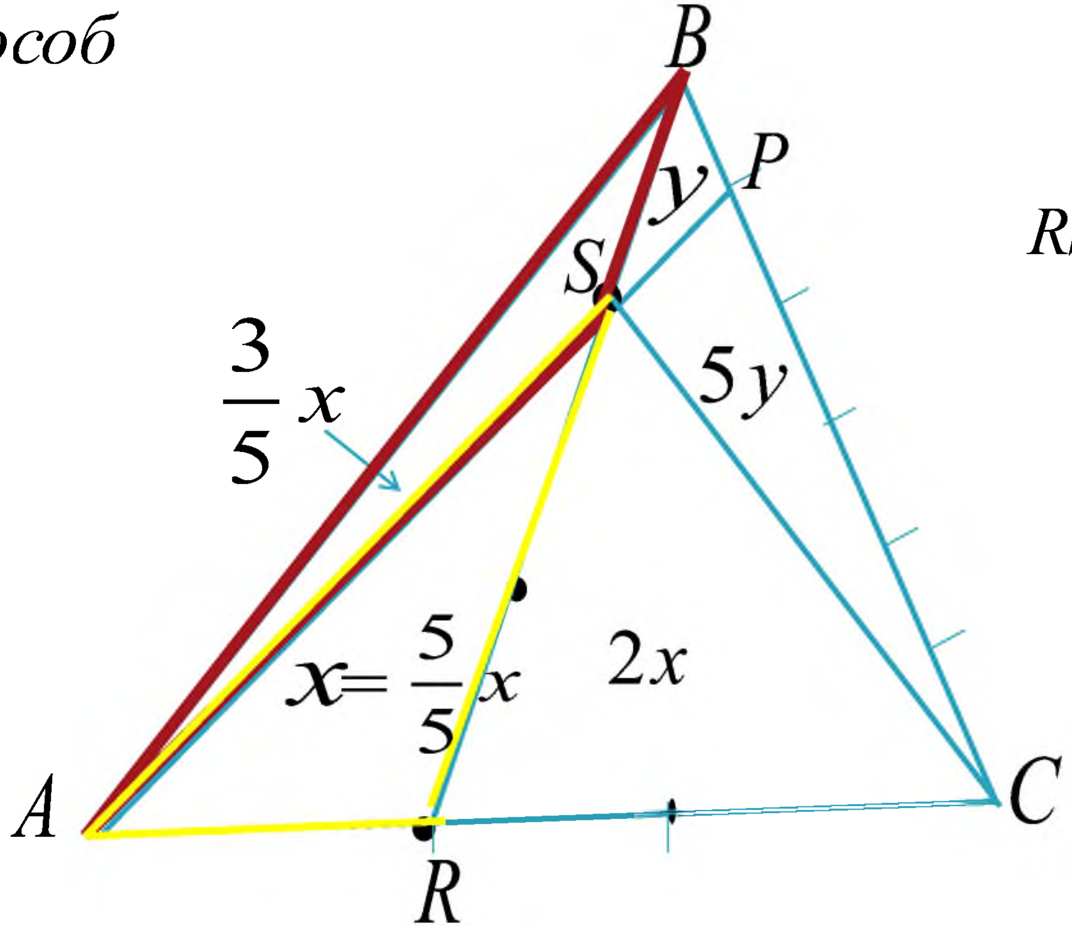
TR – средняя линия $\Delta AQD \Rightarrow$

$$TR = \frac{1}{2} DQ$$

Таким образом, $TR = \dfrac{1}{4} BR$

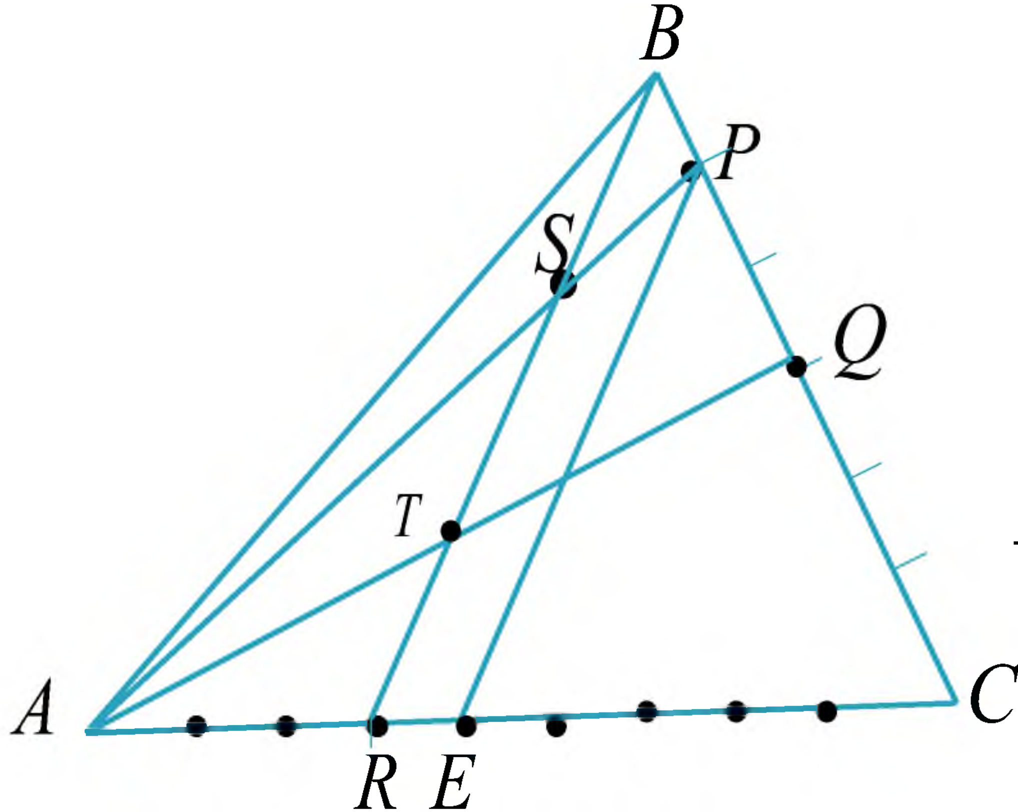
Аналогично проводим рассуждения, определяя положение точки S

1 *способ*



$$RS = \frac{5}{8}BR$$

способ 2



$$\frac{RS}{PE}=\frac{AR}{AE}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{PE}{BR}=\frac{CE}{CR}=\frac{5}{6}$$

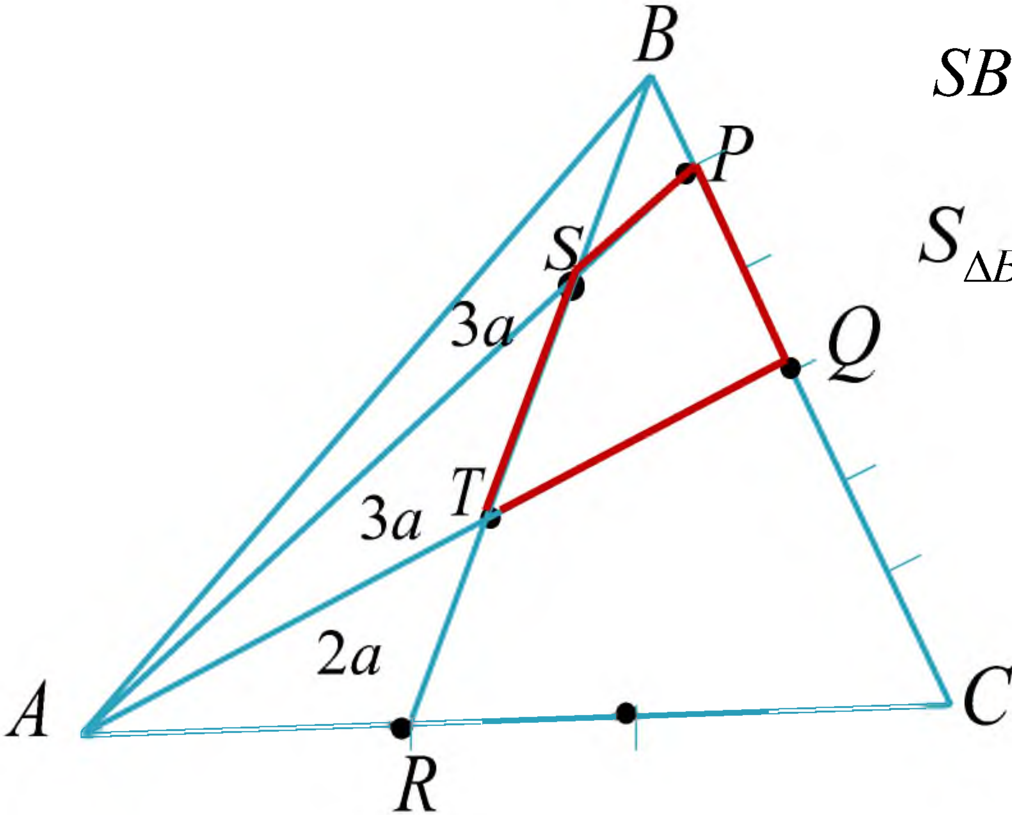
$$\frac{PE}{BR}\cdot\frac{RS}{PE}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{8}\Rightarrow RS=\frac{5}{8}BR$$

$$TR=\frac{1}{4}BR$$

$$SB=BR-RS=BR-\frac{5}{8}BR=\frac{3}{8}BR$$

$$TS=RS-TR=\frac{5}{8}BR-\frac{1}{4}BR=\frac{3}{8}BR$$

$$\Rightarrow SB=TS\Rightarrow S_{\Delta ASB}=S_{\Delta AST}$$



$$SB = ST = \frac{3}{8}BR; TR = \frac{2}{8}BR$$

$$S_{\Delta BSA} = S_{\Delta SAT} = 3a; S_{\Delta ATR} = 2a$$

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta ABR} = 24a$$

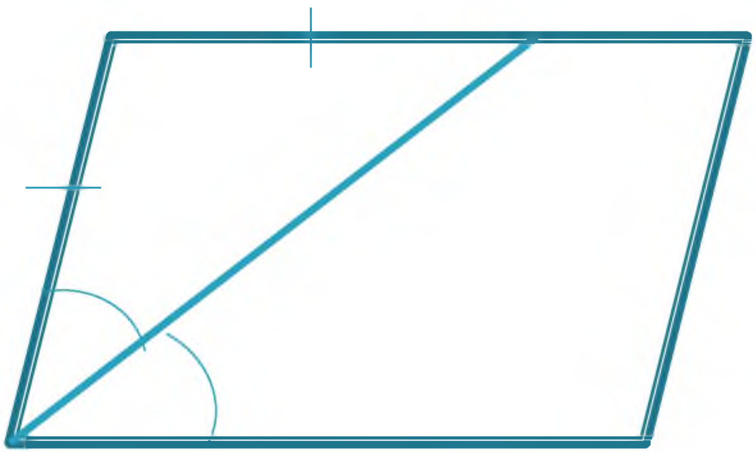
$$S_{\Delta APQ} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = 8a$$

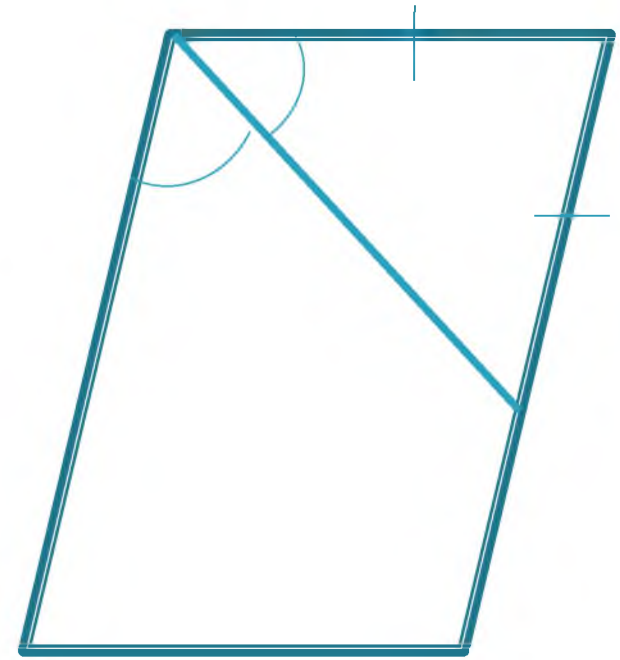
$$S_{TSPQ} = S_{\Delta APQ} - S_{\Delta AST} = 8a - 3a = 5a$$

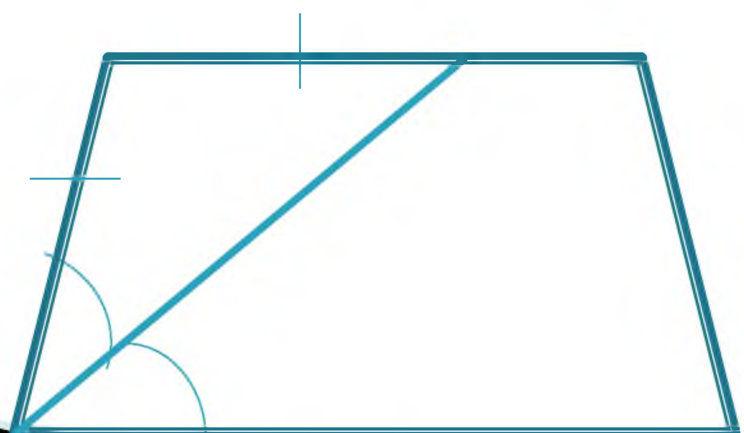
$$\frac{S_{TSPQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{5}{24}$$

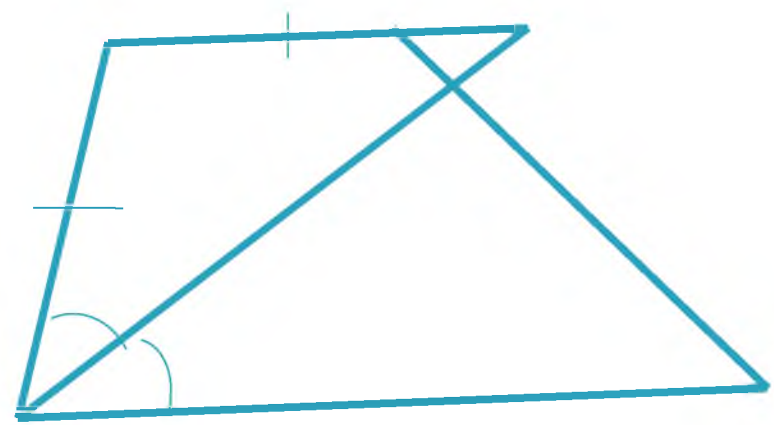
Важная теорема 3

Биссектриса угла параллелограмма(трапеции) отсекает от него равнобедренный треугольник.







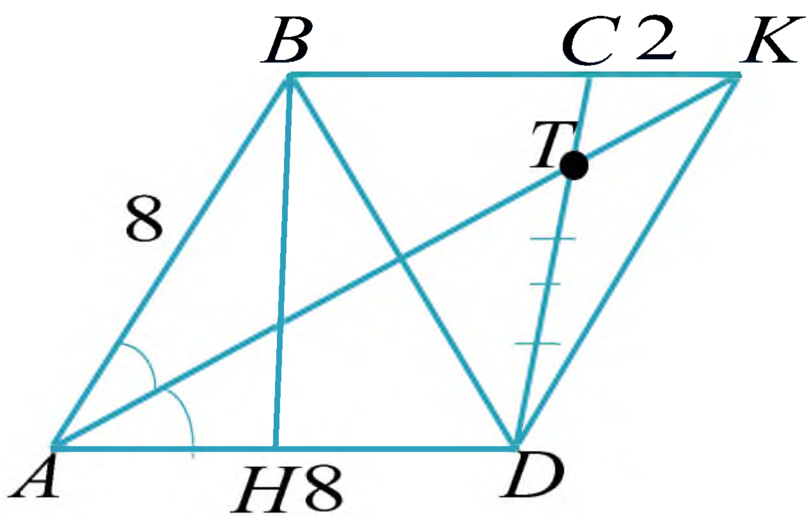


Задача 4(ЕГЭ)

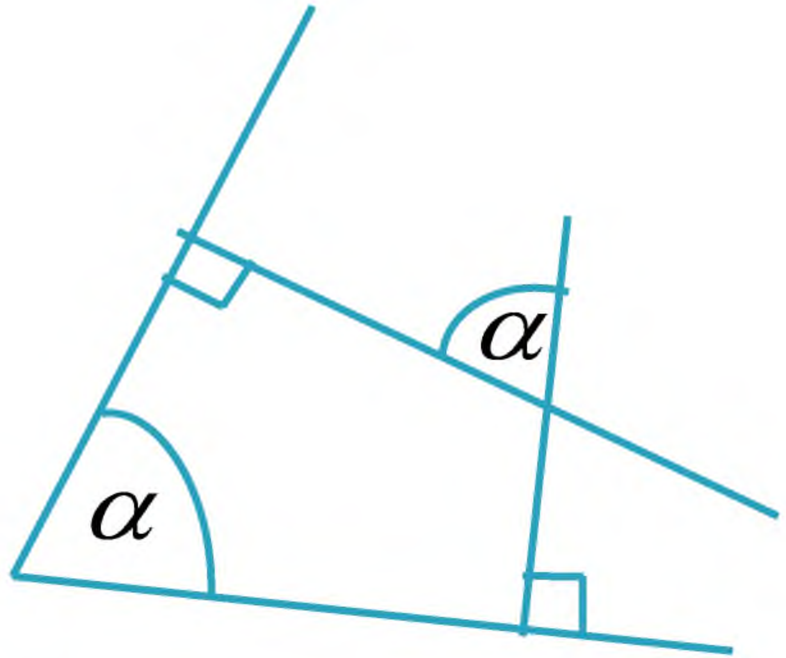
Биссектриса острого угла А трапеции ABCD пересекает боковую сторону CD в точке Т, а продолжение основания ВС трапеции в точке К так, что ABKD – параллелограмм и TD:TC=4:1

а) Докажите, что $AK \perp BD$

б) Найдите площадь трапеции ABCD, если ее сторона $AB = 8$ и $\angle B = 120^0$



Важная теорема 4

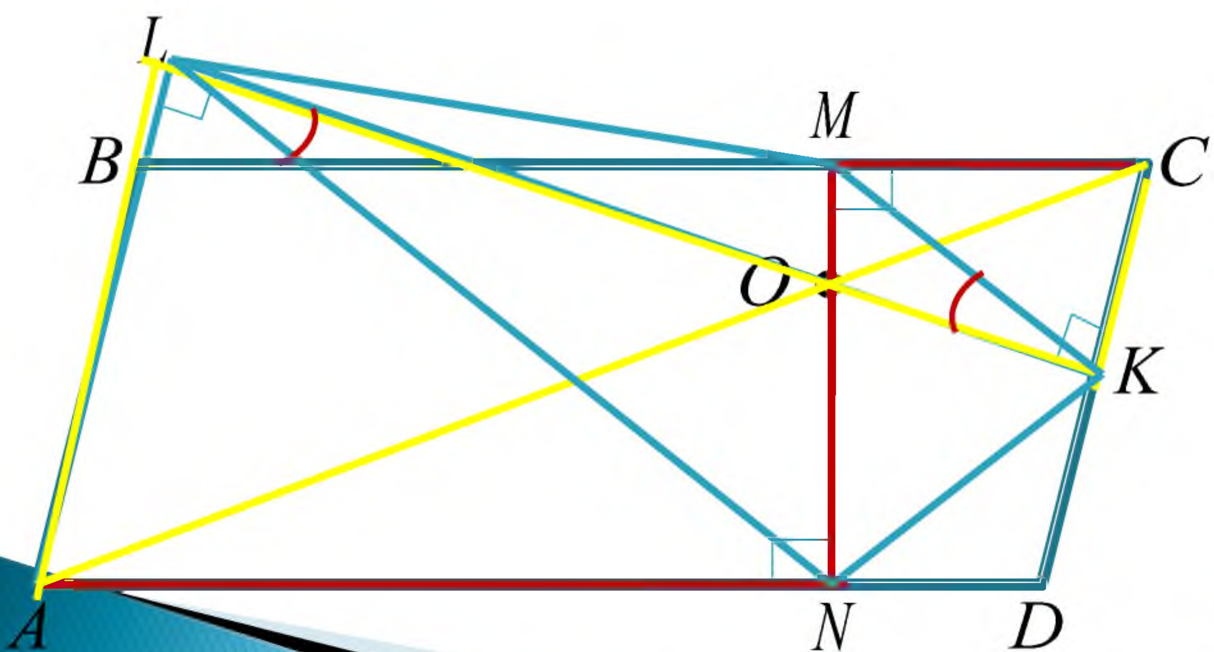


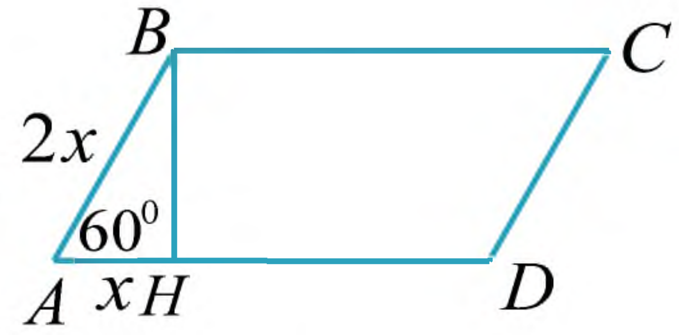
Задача 5(ЕГЭ)

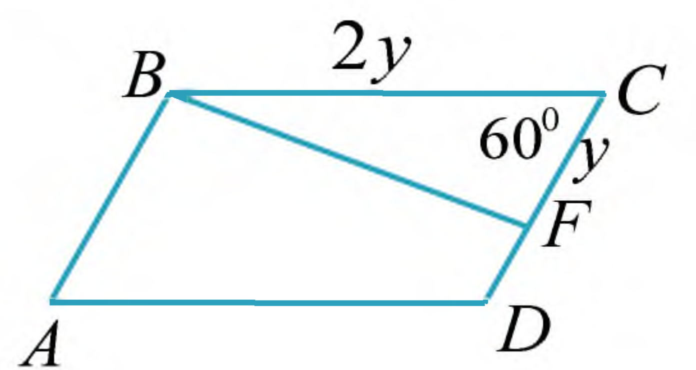
На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен $60°$.





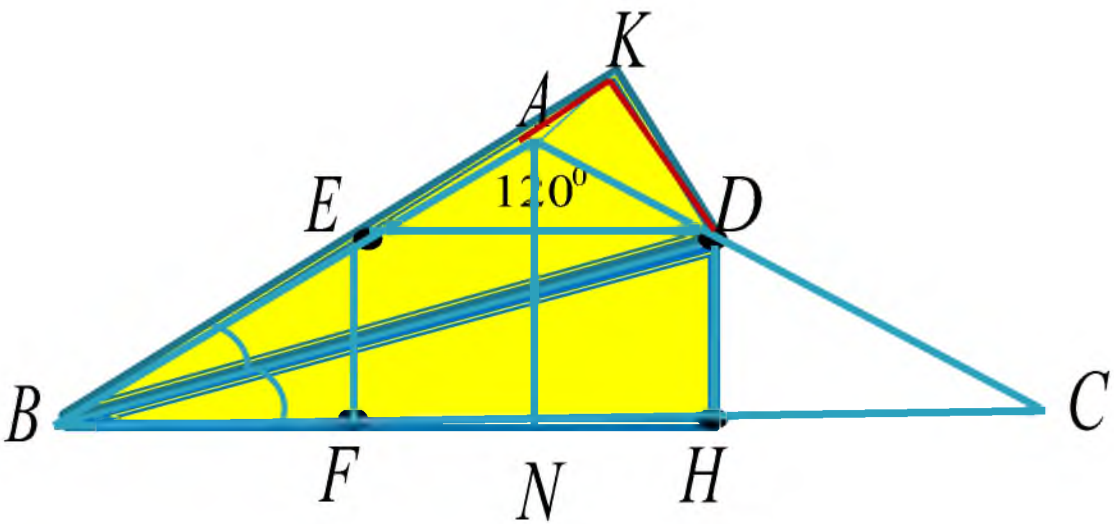


Задача 6(ЕГЭ)

В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

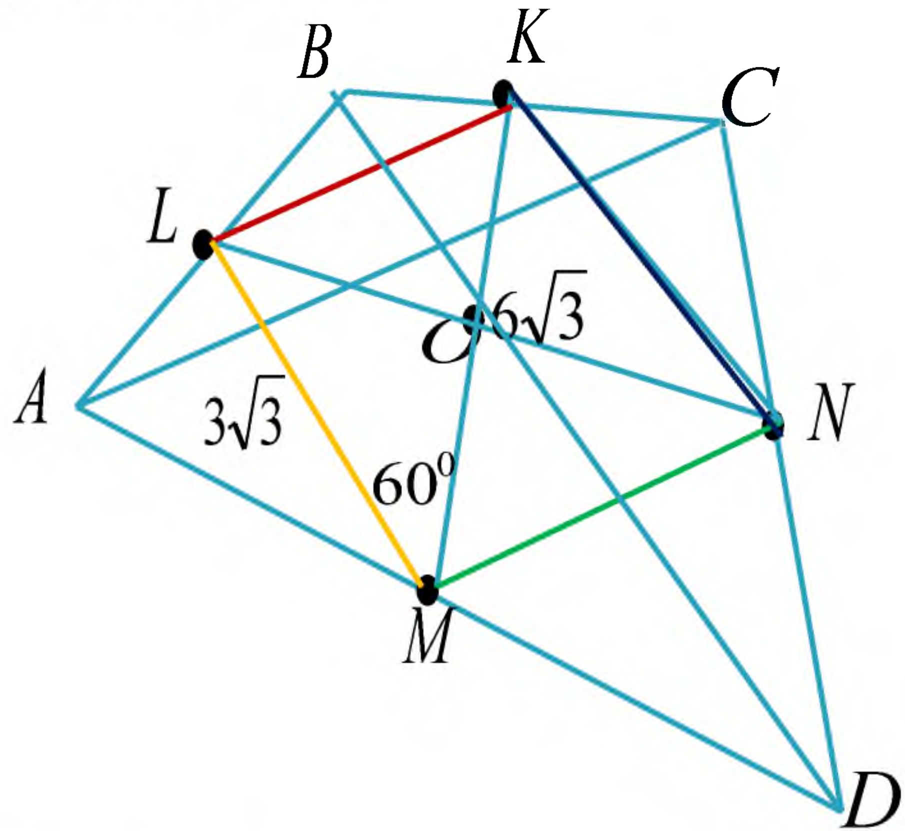


Задача 7(ЕГЭ)

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

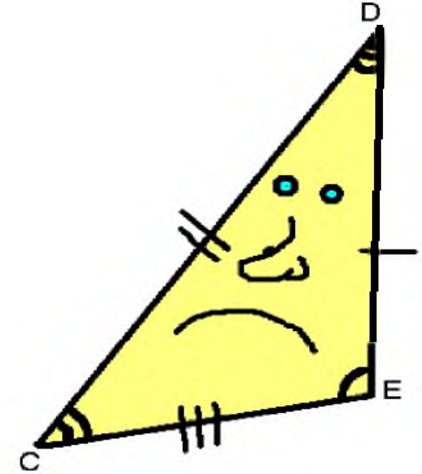
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$, $KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.



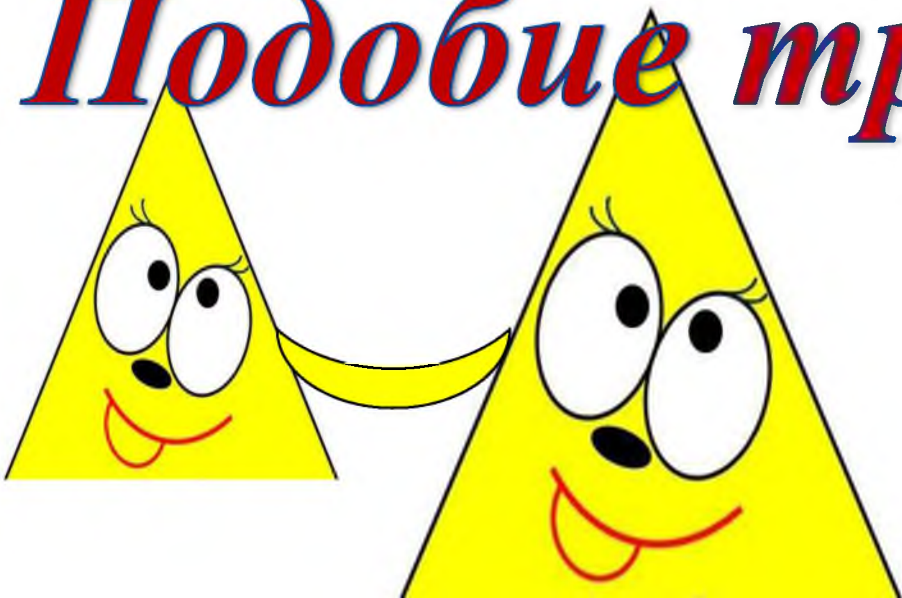
МАОУ Вторая гимназия

Предметно-методическая мастерская
«Решение задач по планиметрии в курсе ЕГЭ»

- Попова О.В., учитель математики высшей квалификационной категории
- Макарова С.А., учитель математики высшей квалификационной категории



Занятие № 3
Подобие треугольников

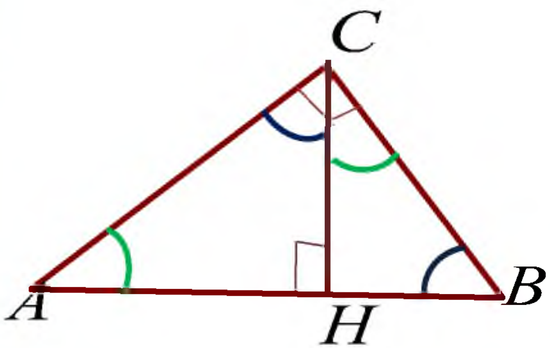


Определение

Треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Коэффициентом подобия называют число, равное отношению сходственных сторон

- Сходственные стороны- это стороны, лежащие напротив равных углов



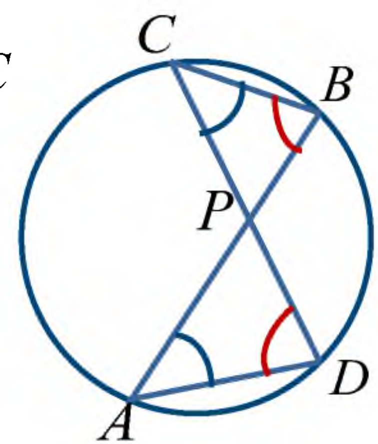
$1.\Delta ACB \infty \Delta BHC$

$AB = 10$

$BC = 5$

$k = ?$

$BH = ?$



$1.\Delta CBP \infty \Delta ADP$

$AD = 10$

$CB = 8$

$PD = 5$

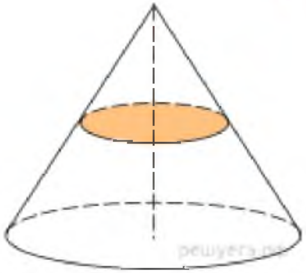
$k = ?$

$BP = ?$

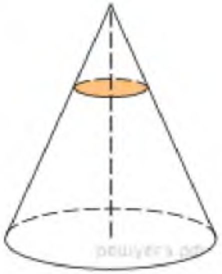
Свойства подобных треугольников

- Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия

Задачи



1. Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



2. Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

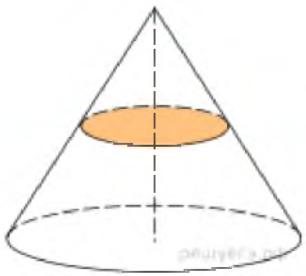
3. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

4. Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 2 раза?

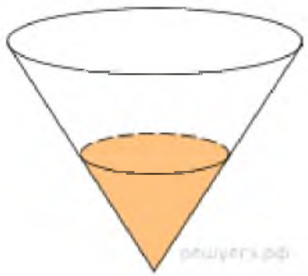
• Отношение объёма подобных стереометрических фигур равно кубу коэффициента подобия

Задачи

1. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



2. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 1/2 высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

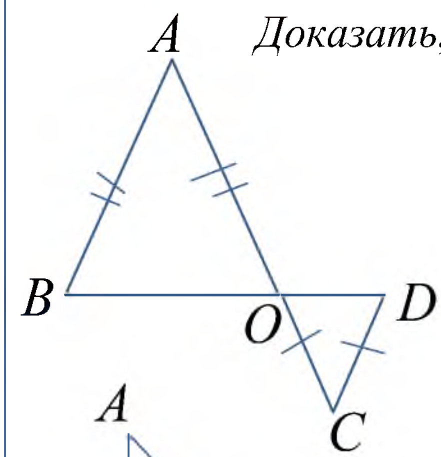


3. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

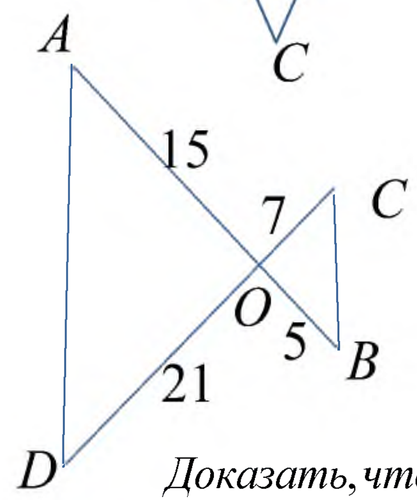
Признаки подобия треугольников

- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказать, что $\Delta ABO \infty \Delta CDO$

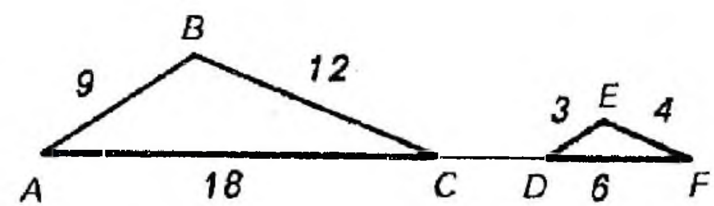


- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



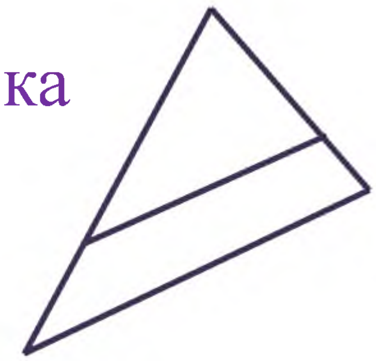
Доказать, что $\Delta AOD \infty \Delta COB$

- Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.



Основные ситуации, связанные с подобием

Прямая, параллельная стороне треугольника



Задачи ЕГЭ(1 часть)

№1 Площадь треугольника *ABC* равна 4, *DE* — средняя линия, параллельная стороне *AB*. Найдите площадь треугольника *CDE*.

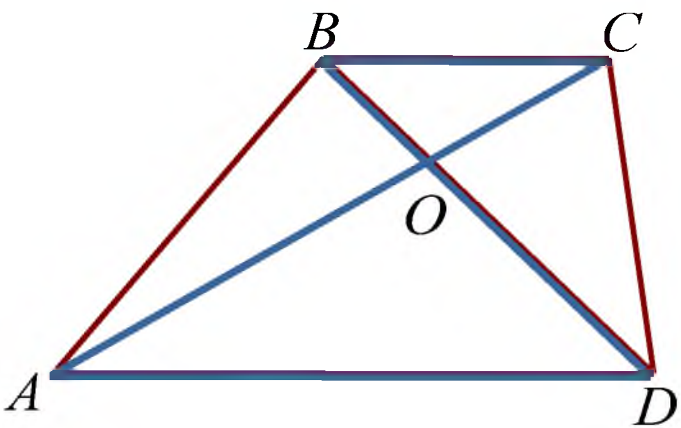
№2 В треугольнике *ABC* отрезок *DE* — средняя линия. Площадь треугольника *CDE* равна 38. Найдите площадь треугольника *ABC*.

№3 Площадь треугольника *ABC* равна 10, *DE* — средняя линия, параллельная стороне *AB*. Найдите площадь трапеции *ABED*.

№4 Детская горка укреплена вертикальным столбом, расположенным посередине спуска. Найдите высоту *l* этого столба, если высота *h* горки равна 3 метрам. Ответ дайте в метрах.

№5 Электрику ростом 1,8 метра нужно поменять лампочку, закреплённую на стене дома на высоте 4,2 м. Для этого у него есть лестница длиной 3 метра. На каком наибольшем расстоянии от стены должен быть установлен нижний конец лестницы, чтобы с последней ступеньки электрик дотянулся до лампочки? Ответ запишите в метрах.

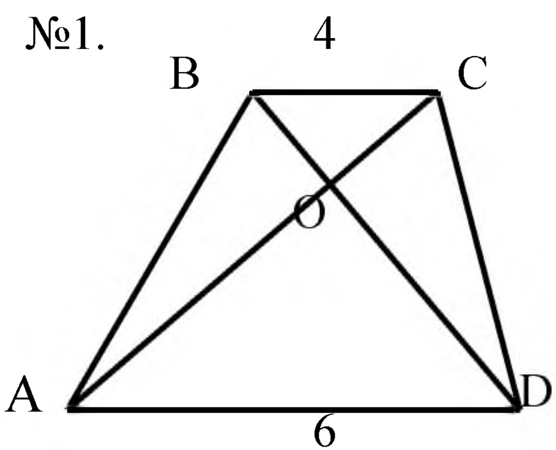
Диагонали трапеции



$$\Delta AOD \infty \Delta BOC$$

$$Доказать, что\ S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$$

№1.

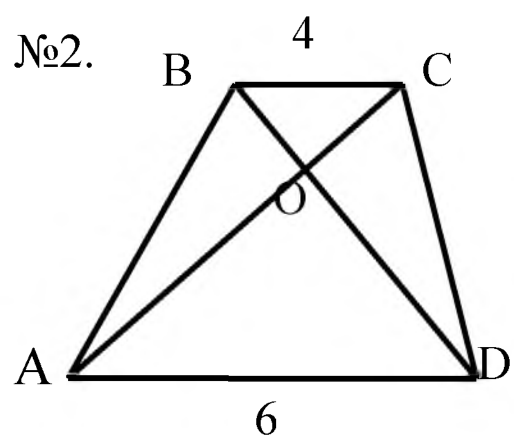


AC=8

Найти AO, OC

BO, OD

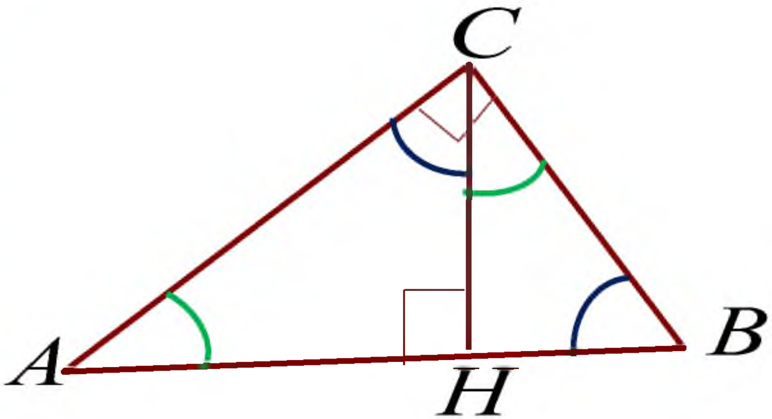
№2.



$S_{AOB} = 12$

Найти S_{ABCD}

Высота прямоугольного треугольника



$$\Delta AHC \sim \Delta ACB$$

$$\Delta CHB \sim \Delta ACB$$

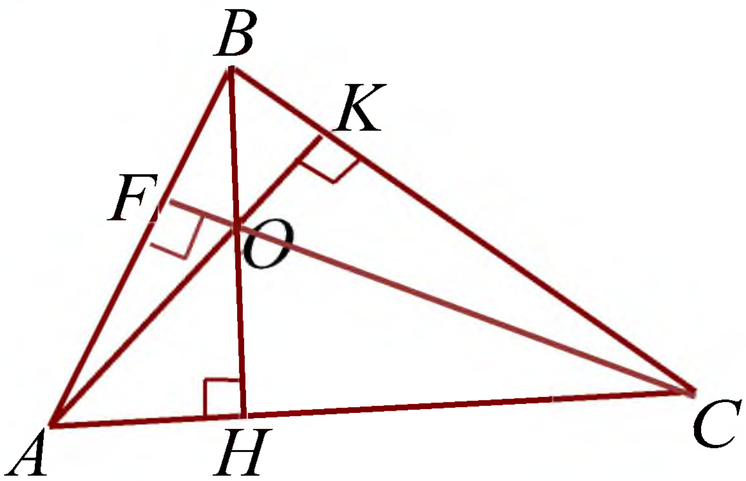
$$\Delta AHC \sim \Delta BHC$$

№1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 8$, $BH = 4$. Найдите $\sin A$

№2 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 25$, $BH = 20$. Найдите $\cos A$

№3 В треугольнике ABC угол C равен 90°, высота CH равна 4, $BC = \sqrt{17}$
Найдите tgA

Высоты треугольника



Выписать все парыподобныхтреугольников

$\Delta ABK \infty \Delta CBF$

$\Delta AHO \infty \Delta BKO$

$\Delta AFO \infty \Delta CKO$

$\Delta AHO \infty \Delta AKC$

$\Delta AFO \infty \Delta CFA$

$\Delta AHO \infty \Delta BHC$

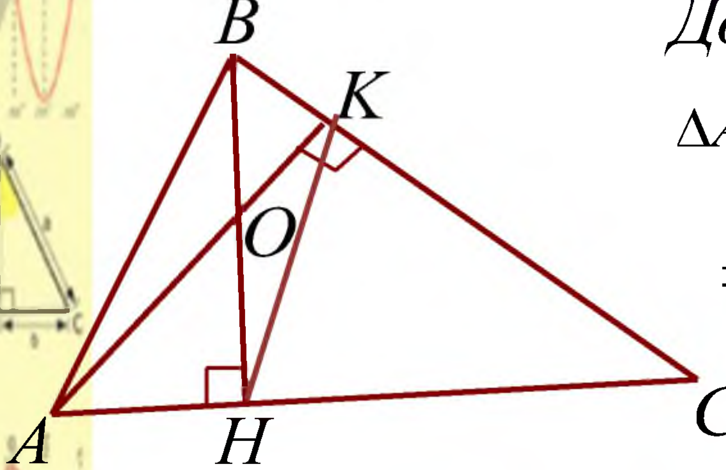
$\Delta AFO \infty \Delta AKB$

$\Delta HAB \infty \Delta FAC$

$\Delta ACK \infty \Delta BCH$

$\Delta BFO \infty \Delta CHO$

Отрезок, соединяющий основания высот



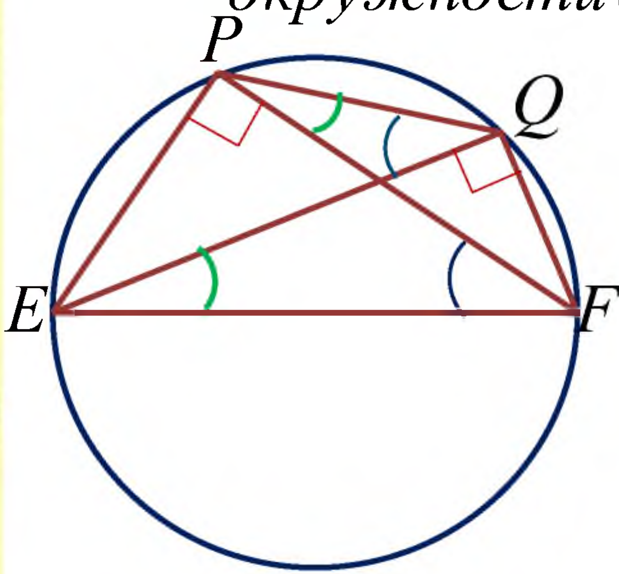
$$Доказать, что\ \Delta ABC \infty \Delta KHC$$

$$\Delta AKC : \frac{KC}{AC} = \cos C \qquad \Delta BHC : \frac{HC}{BC} = \cos C$$

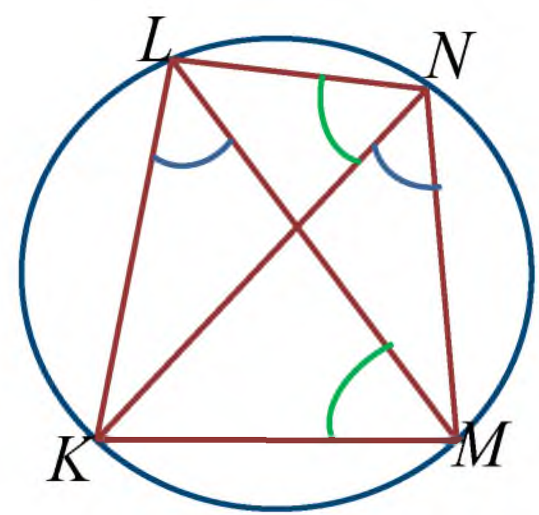
$$\Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{KC}{AC} = \cos C = k \quad , \angle C - общий$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \infty \Delta KHC$$

Важно $E, P, Q, F - лежат\ на$ $окружности\ с\ диаметром\ EF$

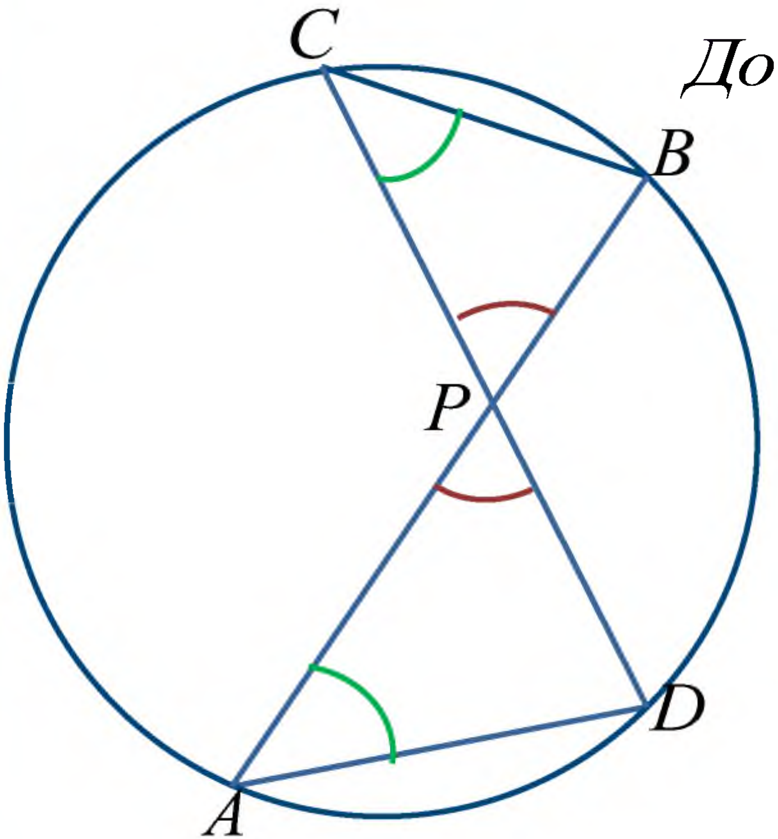


$K, L, N, M - лежат$ $на\ одной\ окружности$



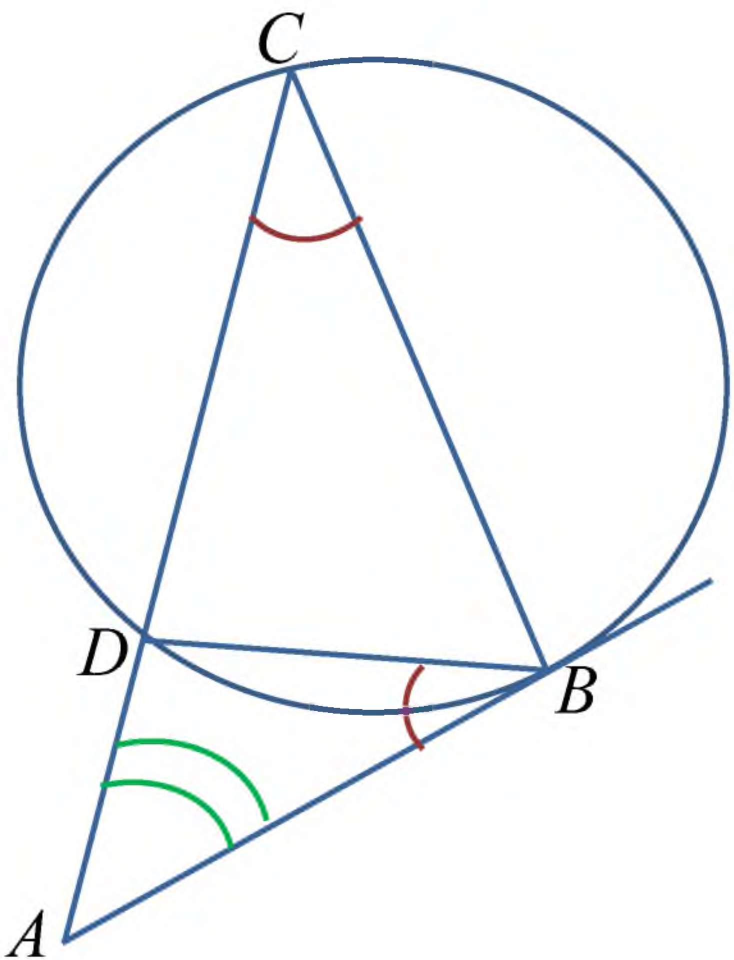
Пересечение хорд

$$\text{Доказать, что } CP \cdot PD = AP \cdot PB$$



Касательная и секущая

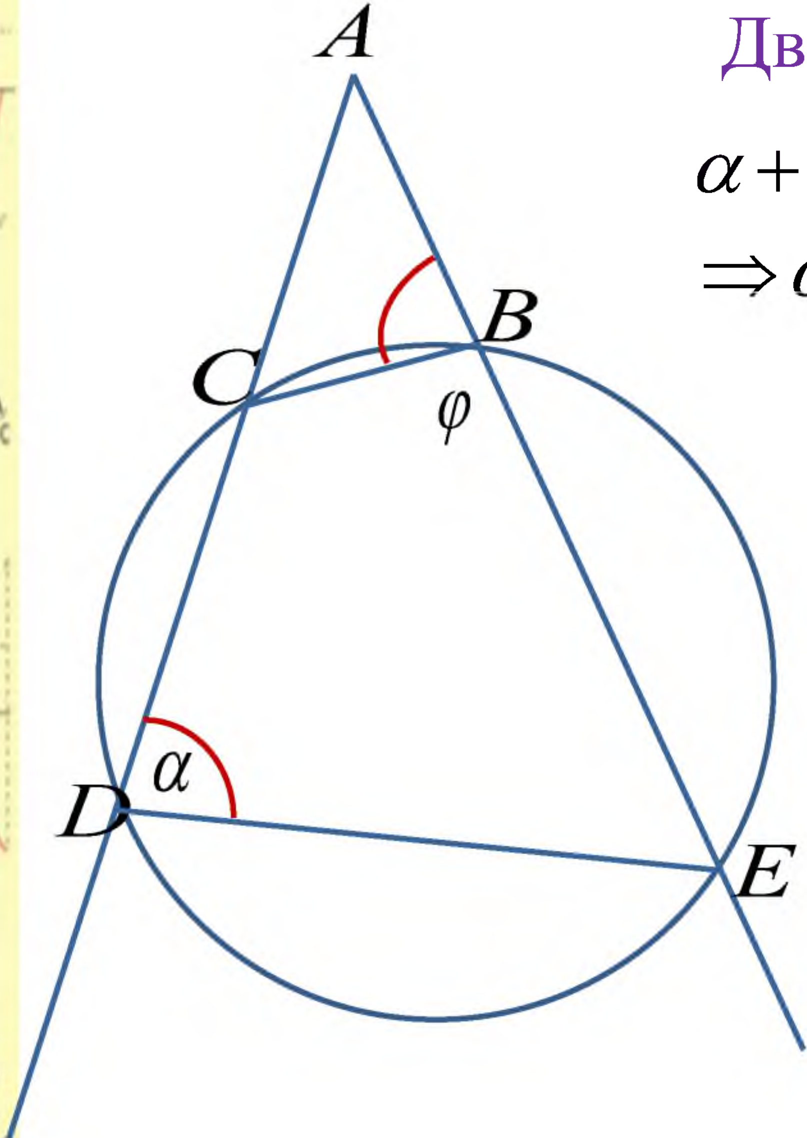
$$Th: \angle DBA = \frac{1}{2} \cup BD$$



$\Delta DAB \sim \Delta CAB$

Доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$

Две секущие



$$\alpha + \varphi = 180^0 \quad \angle ABC + \varphi = 180^0$$

$$\Rightarrow \alpha = \angle ABC \quad , \angle DAE - общий$$

$$\Rightarrow \Delta ACB \infty \Delta DAE$$

$\boxed{\textit{Свойство секущих}}$

Доказать, что $AE \cdot AB = AC \cdot AD$

Задачи ЕГЭ

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH, из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4

ΔAHB – *прямоугольный* $\Rightarrow$

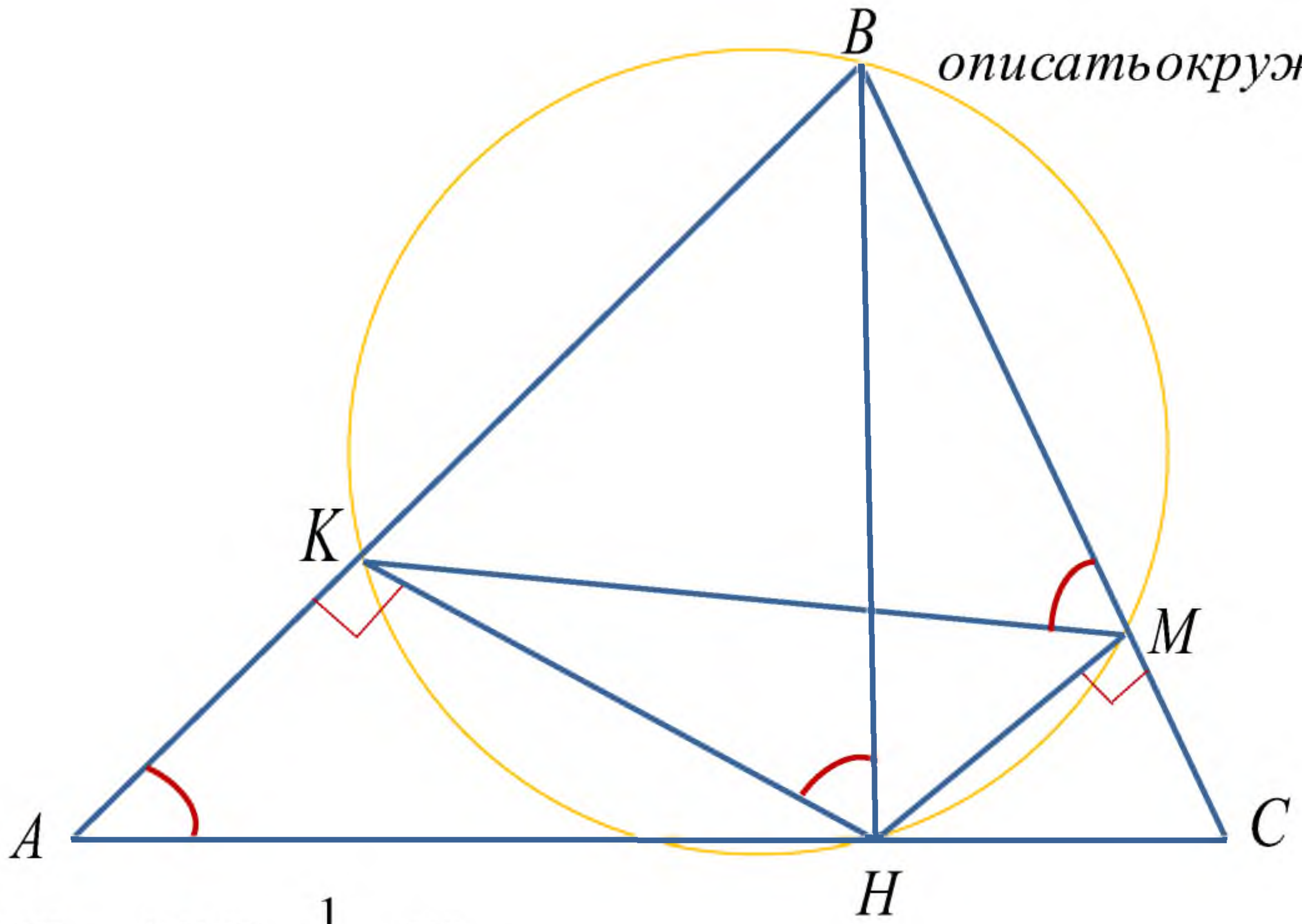
$\Delta AKH \infty \Delta BKH \Rightarrow \angle BAH = \angle BHK$

$BKHM$ – *выпуклый*,

где $\angle BKH + \angle BMH = 180^0 \Rightarrow$

около $BKHM$ *можно*

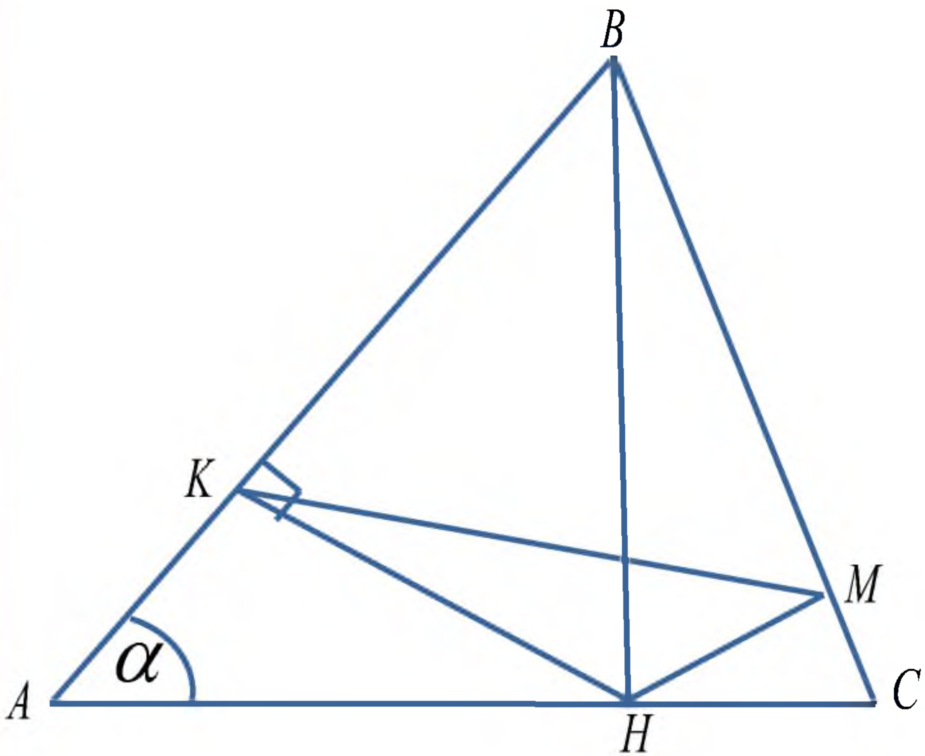
описатьокружность



$$\angle BHK = \angle KMB = \frac{1}{2} \cup KB$$

$$\angle B - общий, \angle BMK = \angle BAC \Rightarrow \Delta BMK \infty \Delta ABC$$

Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC* равен 4



$$\Delta ABC : \frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{2R}$$

$$\Delta BKH : \frac{BK}{BH} = \sin\alpha$$

$$\frac{BK}{BH} = \frac{BC}{2R} \Rightarrow \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Delta BMK \infty \Delta ABC \Rightarrow \frac{BC}{BK} = k = 4$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BMK}} = k^2 = \frac{1}{16}$$

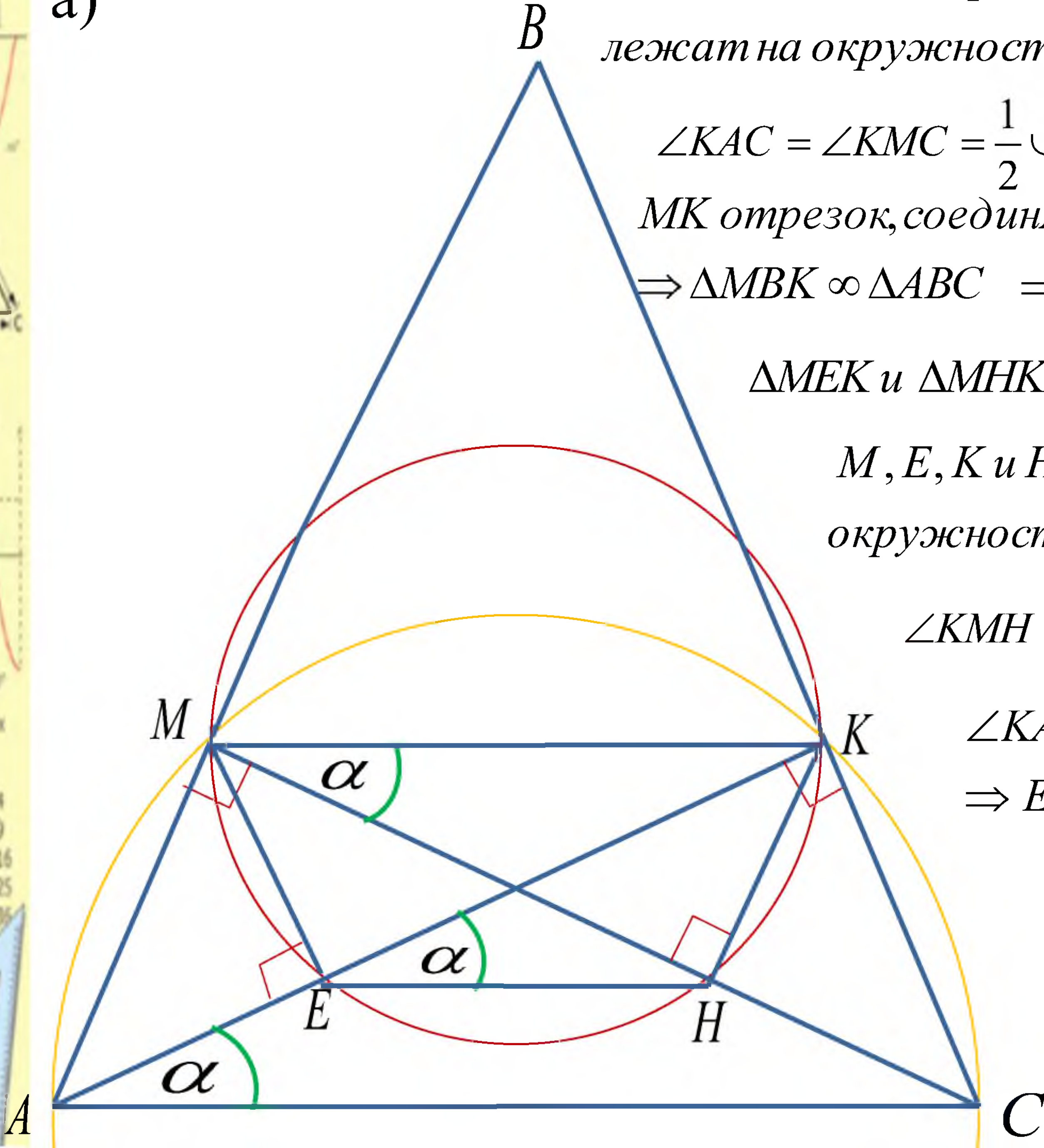
$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BMK}}{S_{AKMC}} = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{15}$$

В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;

б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен $30°$.

а)



ΔAMC и ΔAKC – прямоугольные $\Rightarrow A, M, K, C$ лежат на окружности с диаметром AC

$$\angle KAC = \angle KMC = \frac{1}{2} \cup KC$$

MK отрезок, соединяющий основания высот $\Rightarrow \Delta MBK \infty \Delta ABC \quad \Rightarrow \dfrac{MK}{AC} = \dfrac{BK}{AB} = \dfrac{BM}{AC} = \cos\angle B$

ΔMEK и ΔMHK – прямоугольные $\Rightarrow$

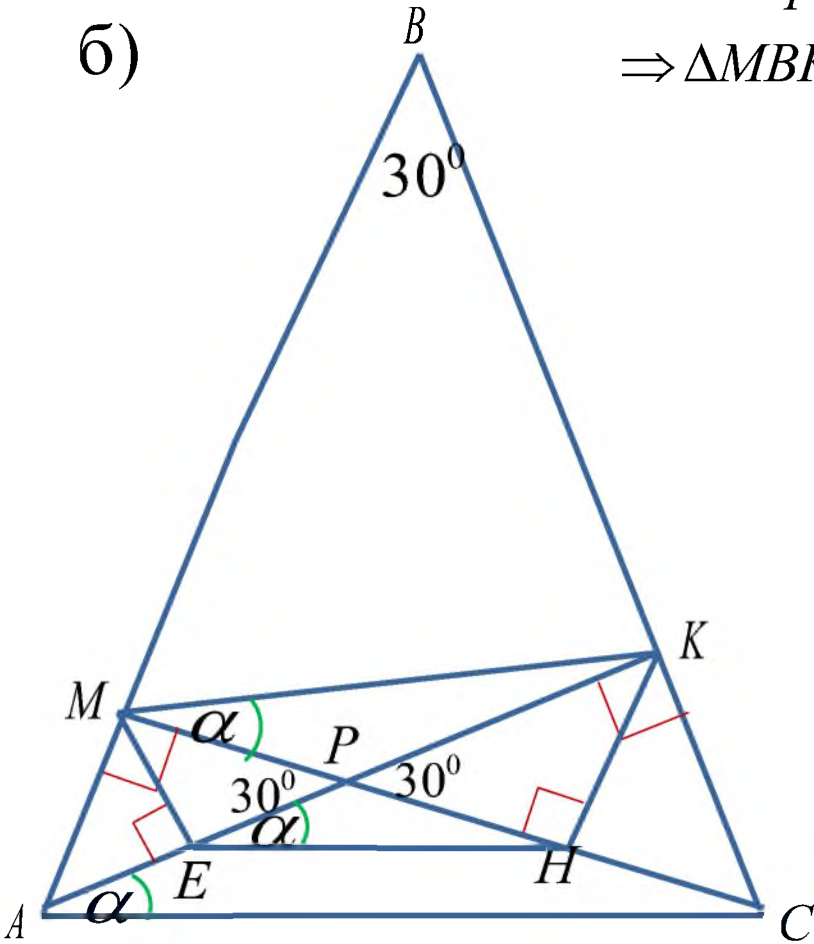
M, E, K и H – лежат на окружности с диаметром MK

$$\angle KMH = \angle KEH = \frac{1}{2} \cup KH$$

$\angle KAC = \angle KEH$ – соотв.

$\Rightarrow EH \parallel AC$

б)



MK отрезок, соединяющий основания высот

$$\Rightarrow \Delta MBK \sim \Delta ABC \quad \Rightarrow \frac{MK}{AC}=\frac{BK}{AB}=\frac{BM}{AC}=\cos\angle B$$

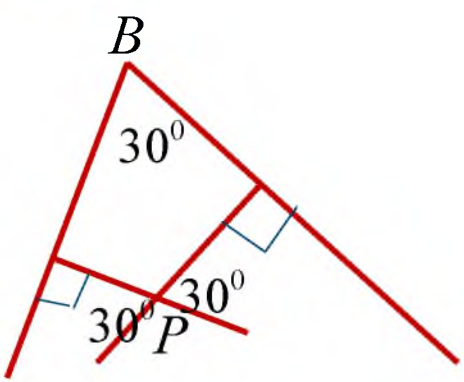
$$\Rightarrow \frac{MK}{AC}=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta MPK \sim \Delta HPE \Rightarrow \frac{EH}{MK}=\frac{PH}{PK}=\frac{EP}{MP}$$

ΔMEP – *прямоугольный*

$$\frac{EP}{MP}=\cos\angle MPE=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{EP}{MP}=\frac{EH}{MK}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MK=\frac{2EH}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{\frac{2EH}{\sqrt{3}}}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \frac{2EH}{\sqrt{3}AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 4EH=3AC\Rightarrow \frac{EH}{AC}=\frac{3}{4}$$

МАОУ Вторая гимназия

Предметно-методическая мастерская
«Решение задач по планиметрии в курсе ЕГЭ»

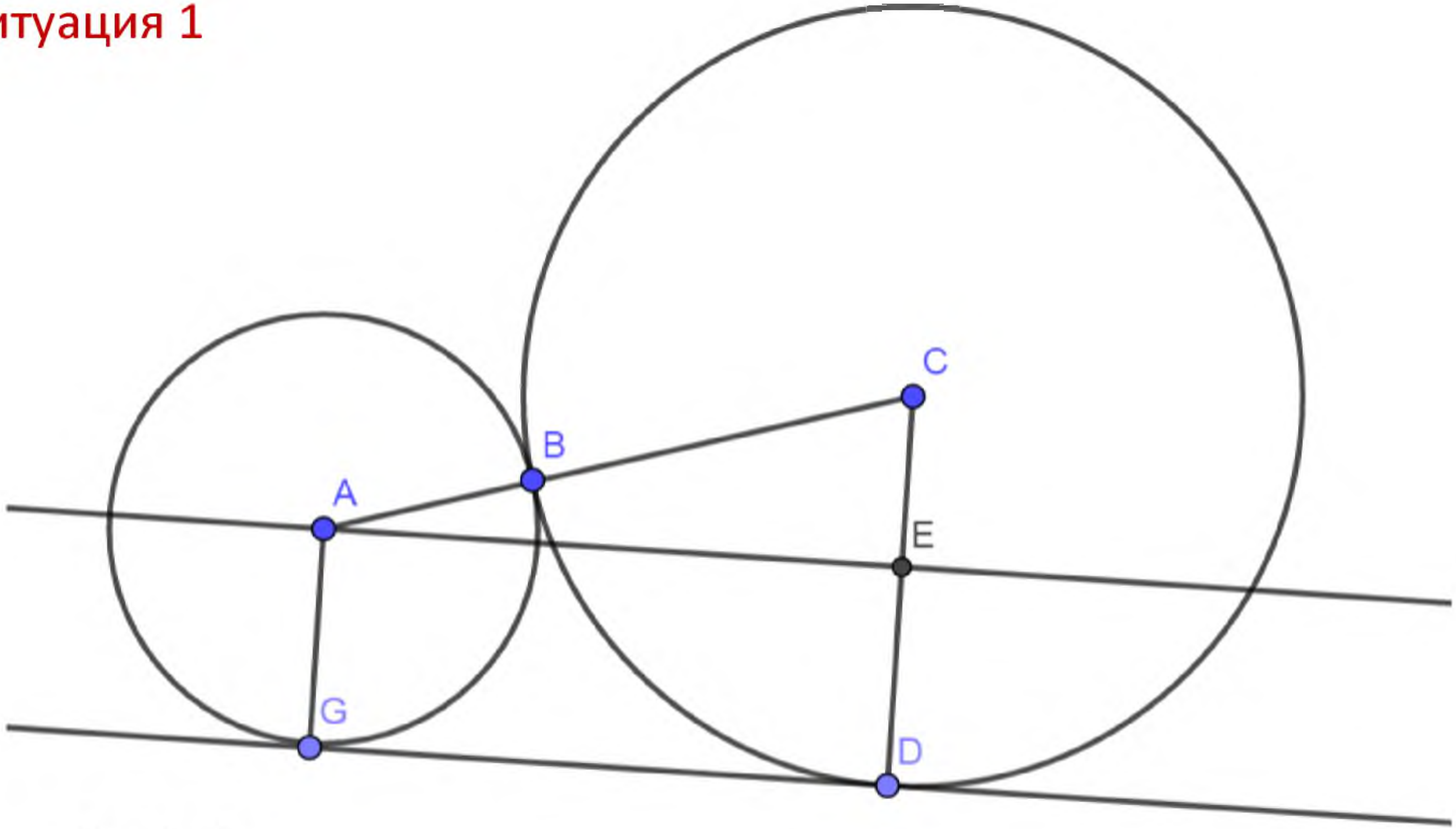
- Попова О.В., учитель математики высшей квалификационной категории
- Макарова С.А., учитель математики высшей квалификационной категории

Занятие № 4

«Окружность»

(основные ситуации и конструкции)

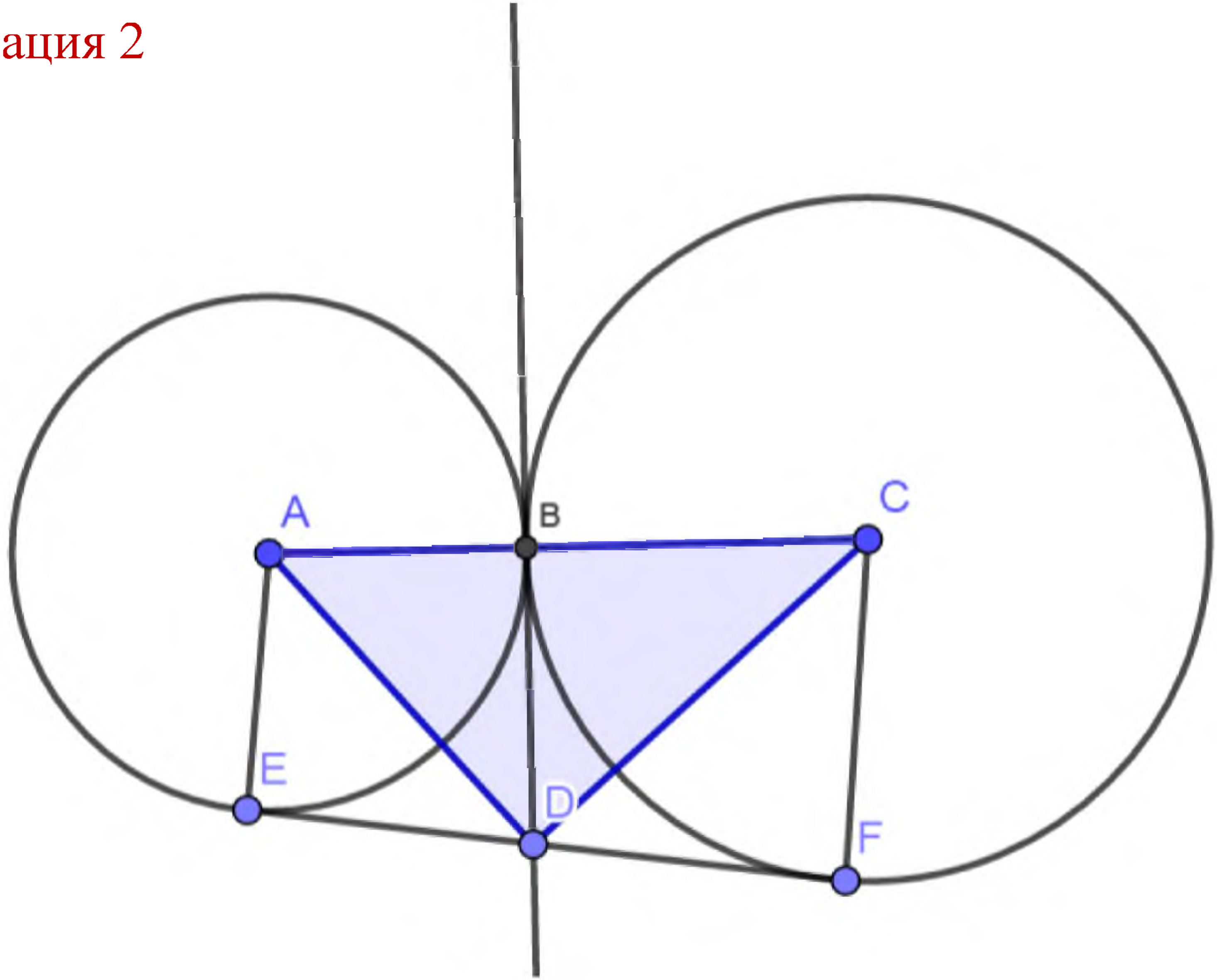
Ситуация 1



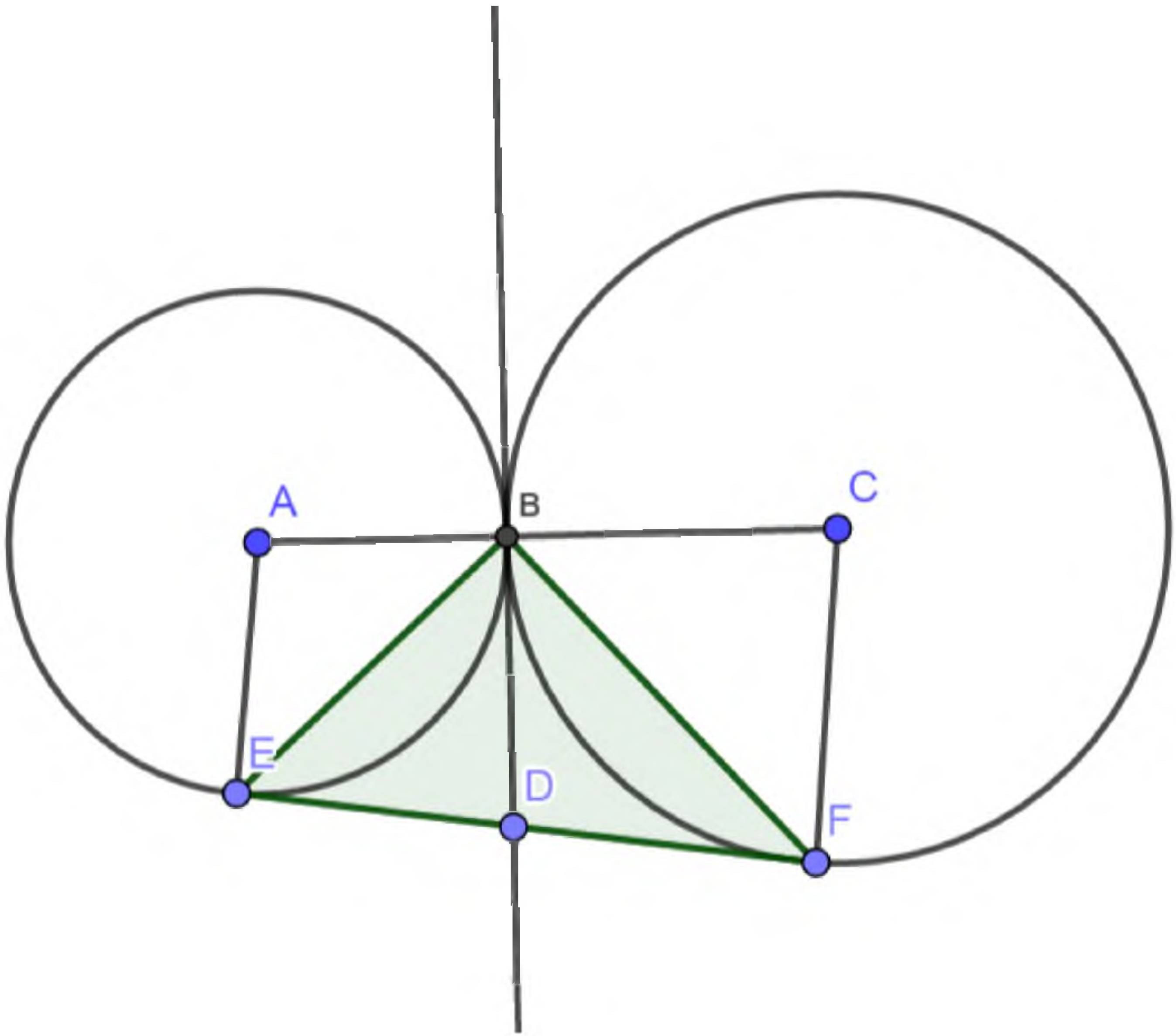
r =2, R=3

1. Найти GD
2. Найти BD
3. Найти GB

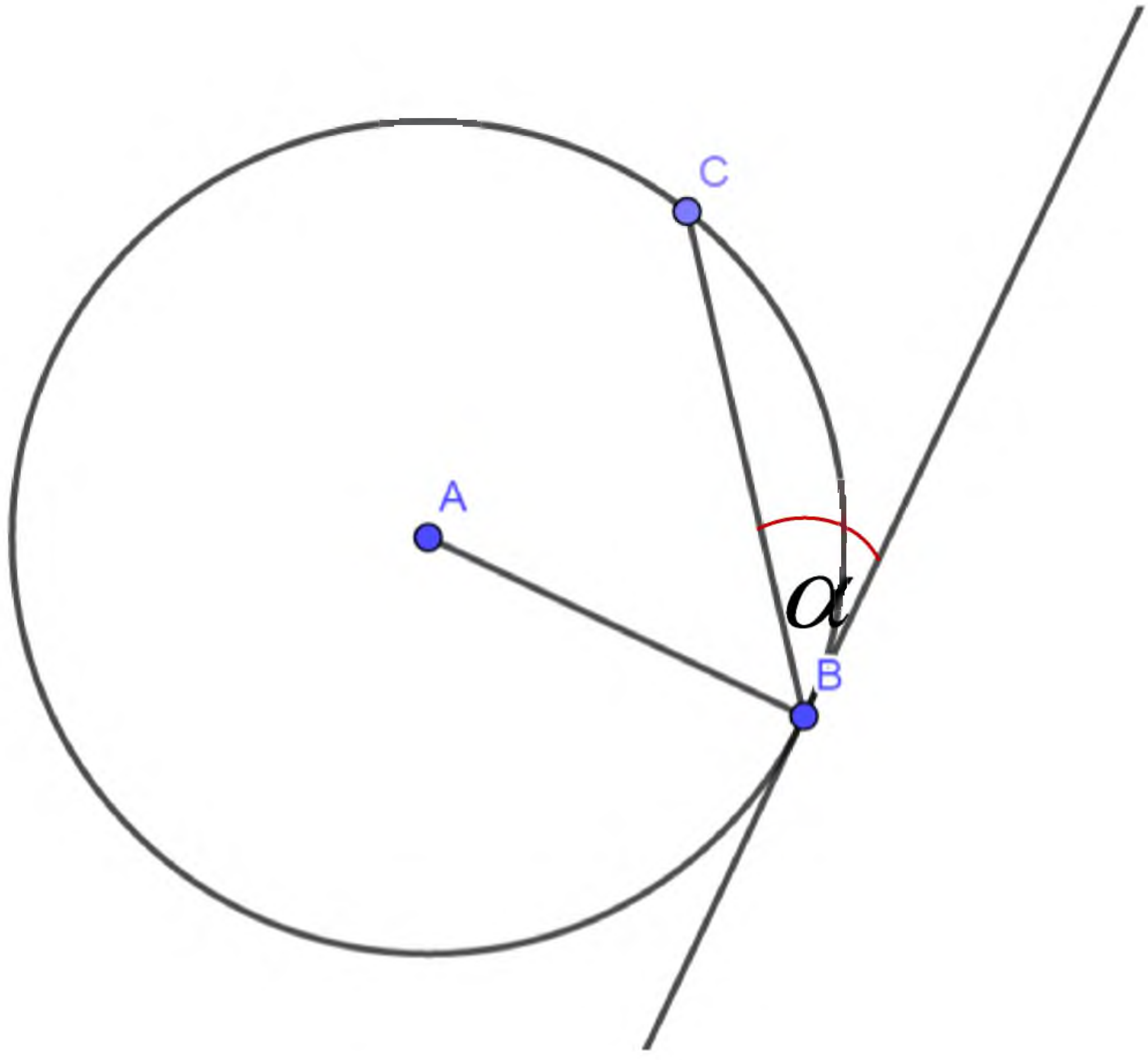
Ситуация 2



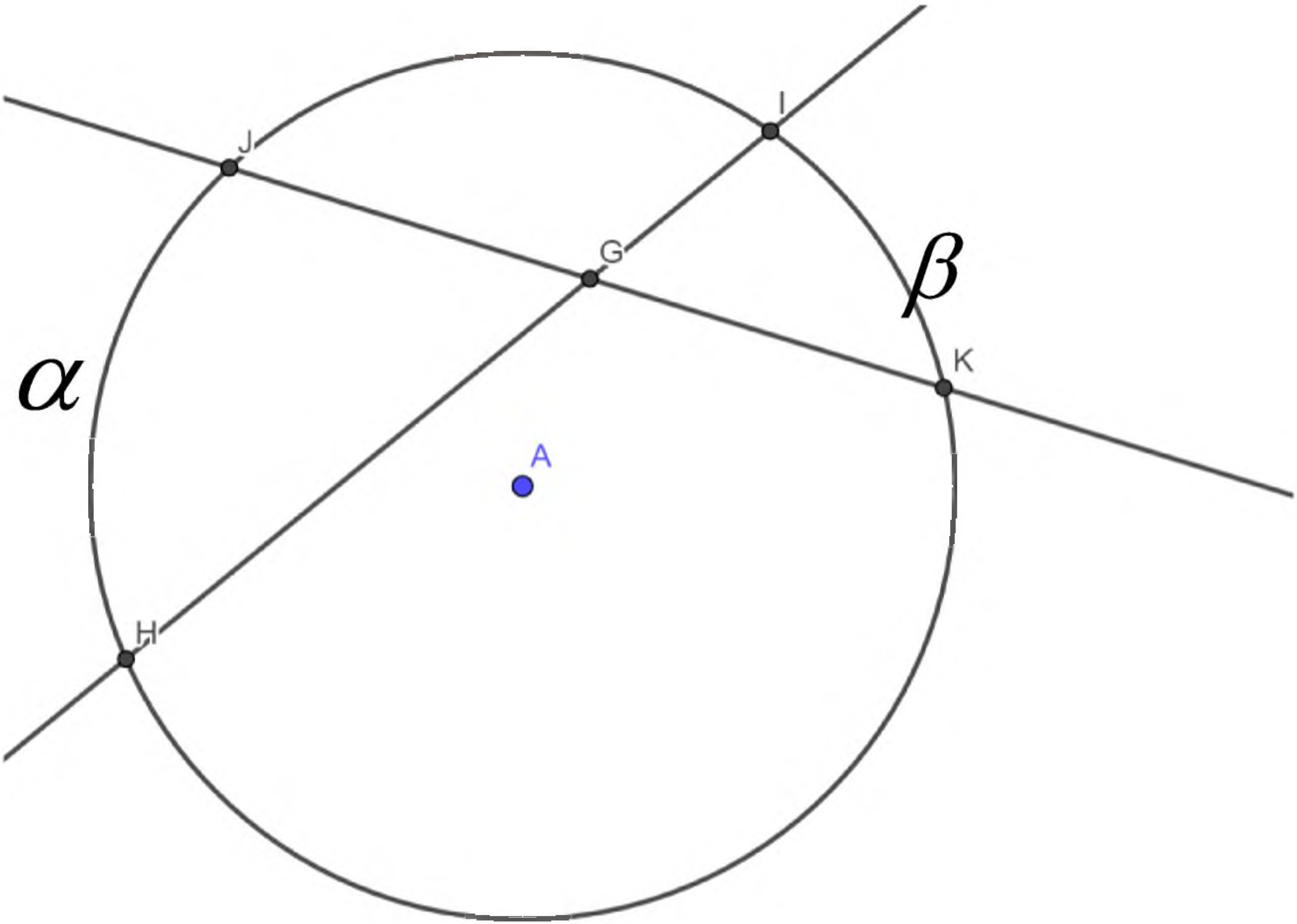
Ситуация 3



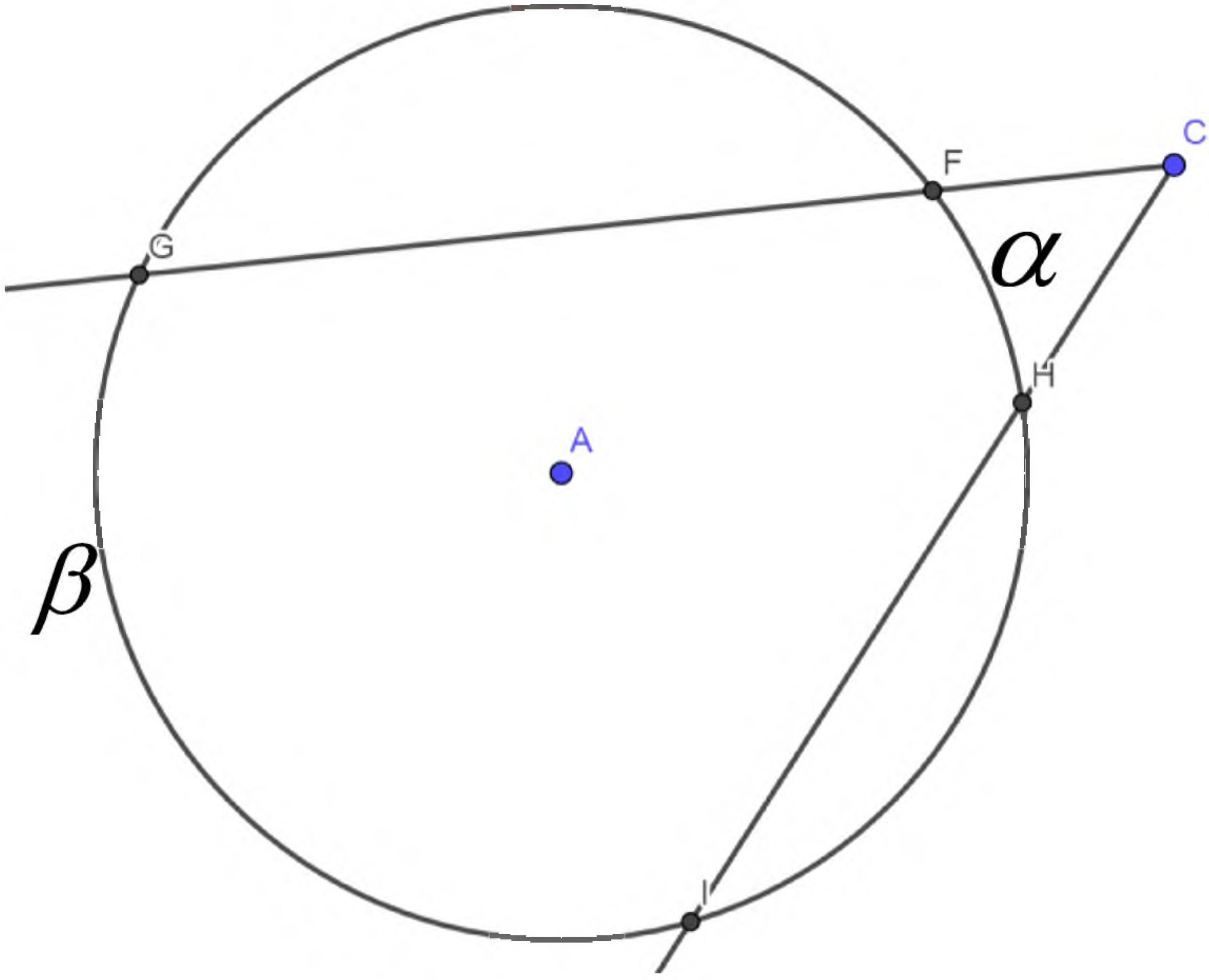
Ситуация 4



Ситуация 5

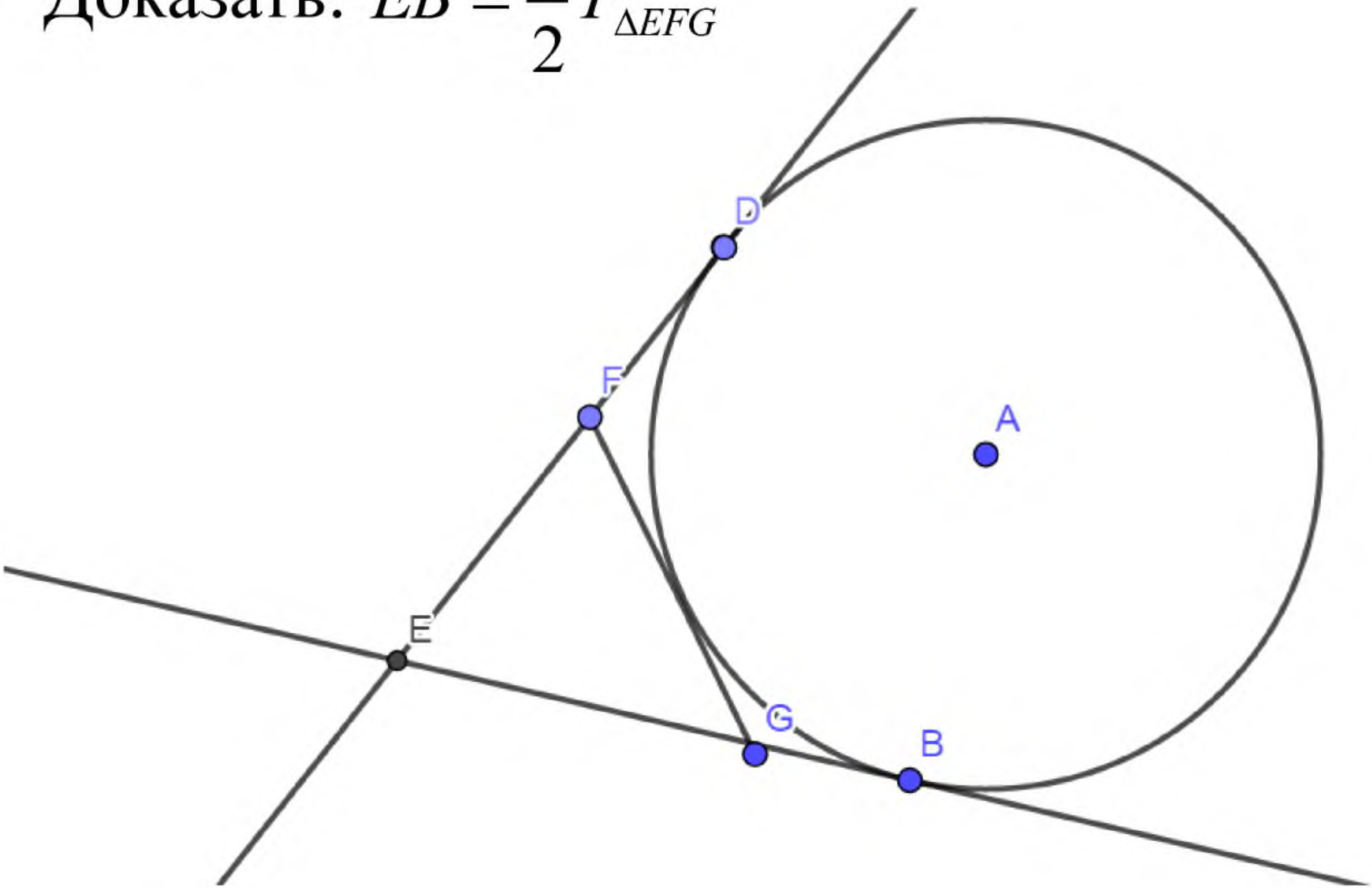


Ситуация 6



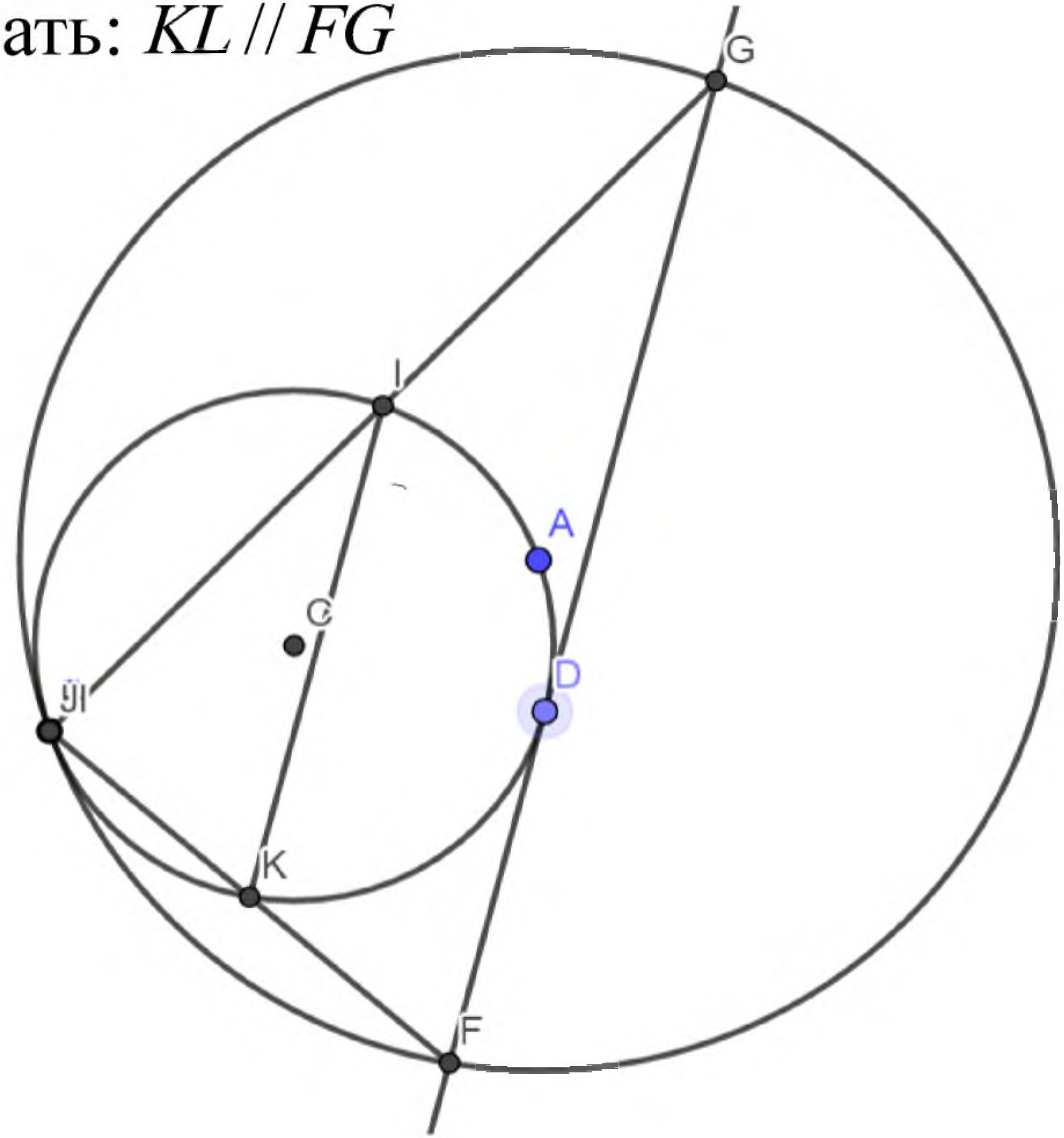
Ситуация 7

Доказать: $EB = \frac{1}{2} P_{\Delta EFG}$

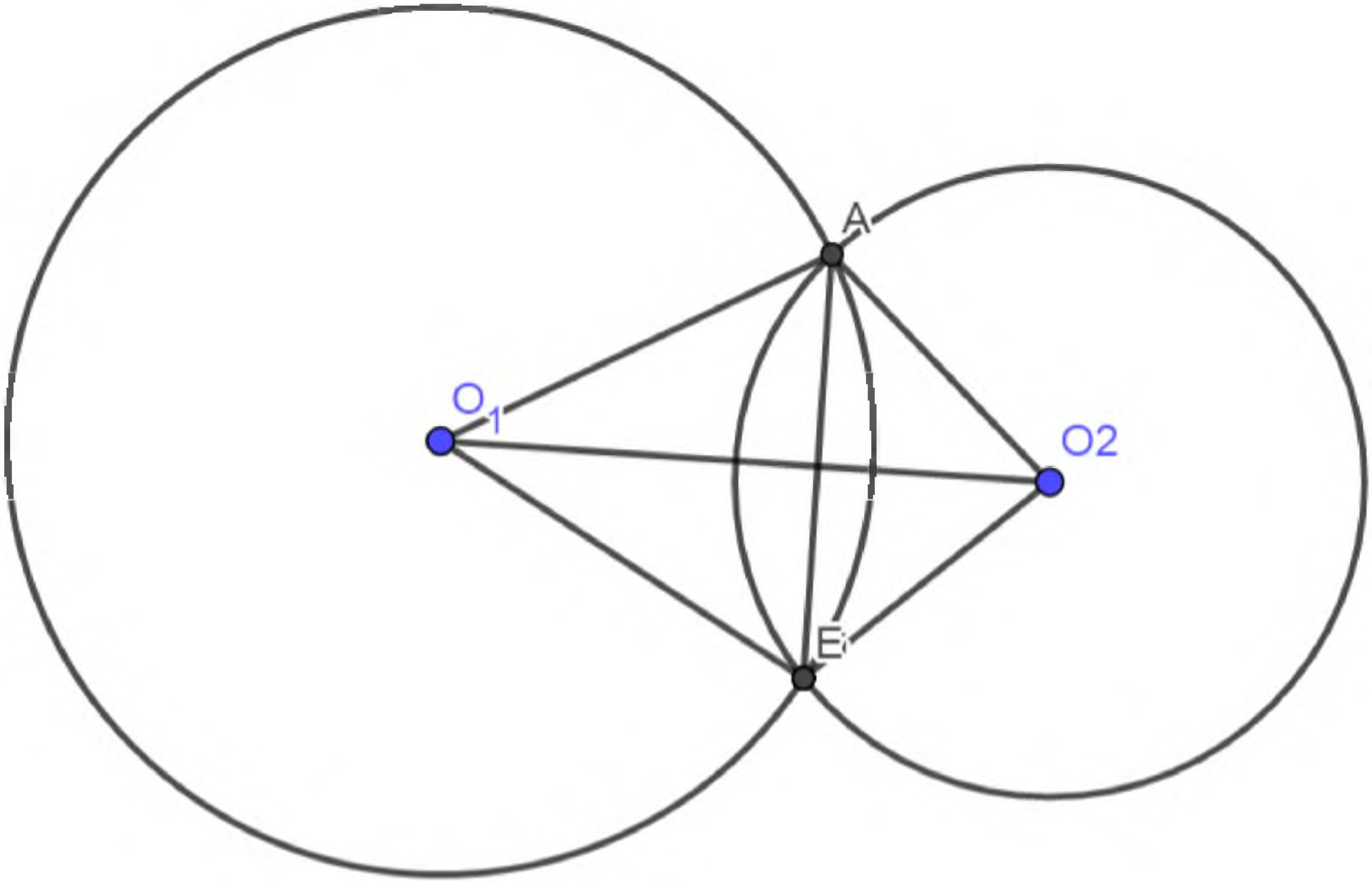


Ситуация 8

Доказать: $KL \parallel FG$



Ситуация 9

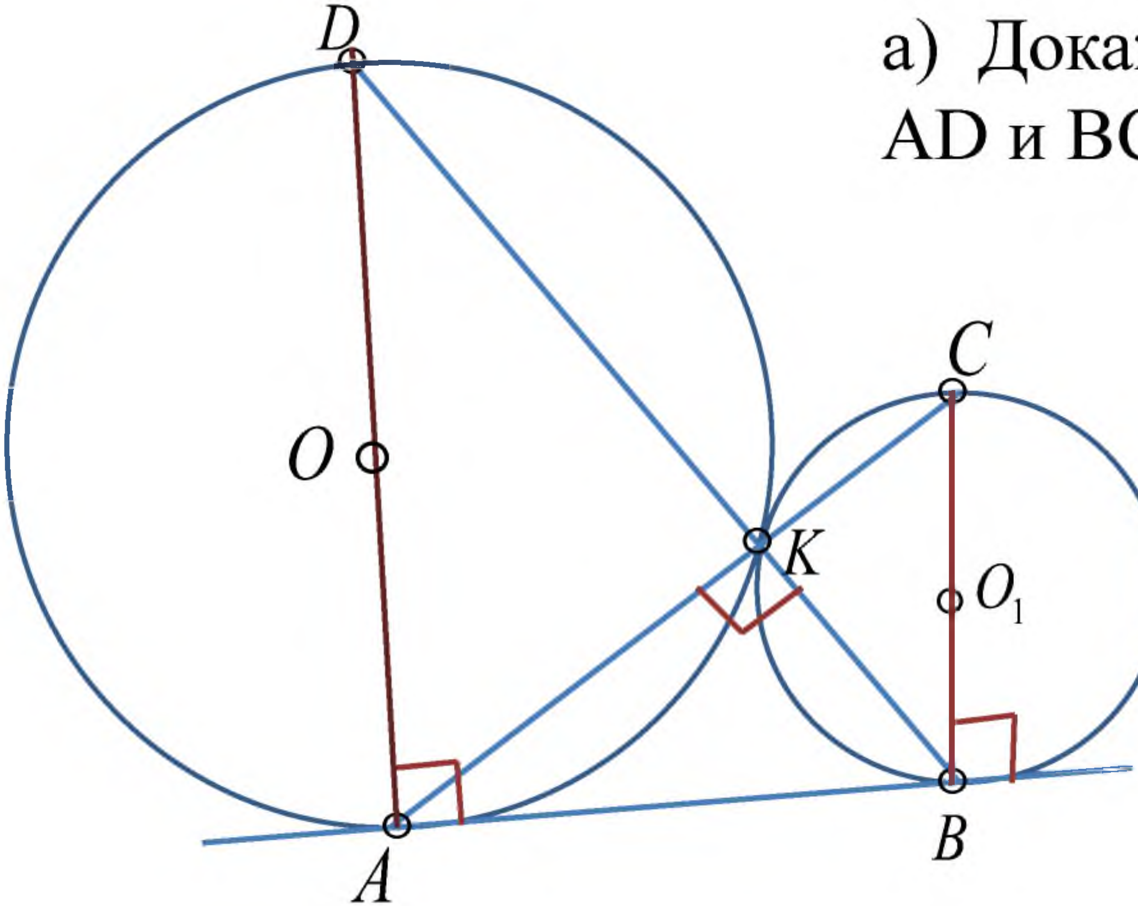


Задача 1.

Две окружности касаются внешним образом в точке К.Прямая АВ касается первой окружности в точке А, а второй – в точке В. Прямая ВК пересекает первую окружность в точке D, прямая АК пересекает вторую окружность в точке С.

а) Докажите, что прямые AD и ВС параллельны.

б) Найдите площадь треугольника АКВ, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1 а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

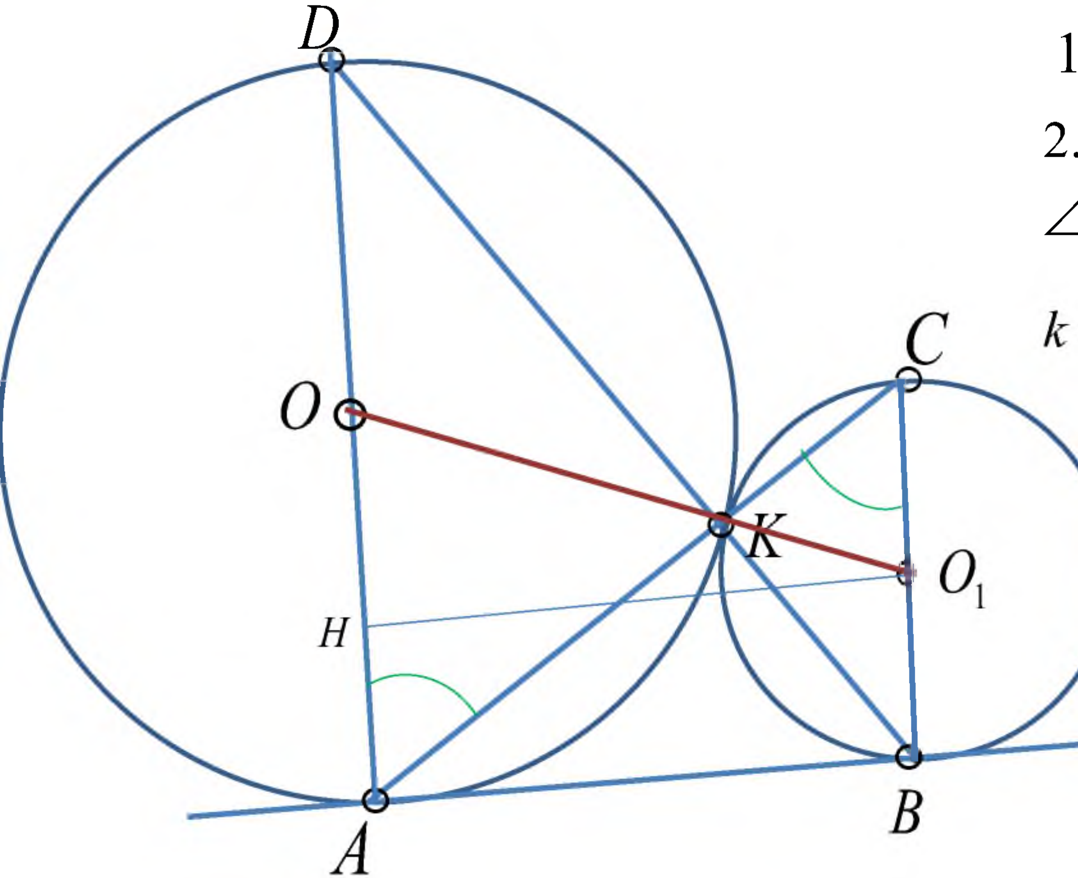


1. $\angle AKB = 90^0 \Rightarrow \angle AKD = 90^0 \Rightarrow \Delta AKD - прямоугольный \Rightarrow$
$AD - диаметр \Rightarrow \angle DAB = 90^0$

2. $\angle BKC = 90^0 \Rightarrow \angle BKC = 90^0 \Rightarrow \Delta BKC - прямоугольный \Rightarrow$
$BC - диаметр \Rightarrow \angle ABC = 90^0$

3. $AD \perp AB, BC \perp AB \Rightarrow AD // BC$

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1



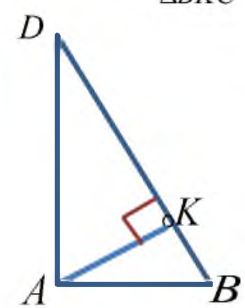
1. $AD \parallel BC \Rightarrow \angle DAC = \angle ACB$ (н/л)

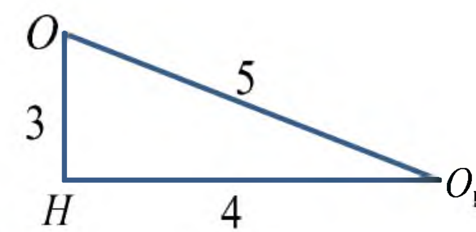
2. ΔAKD и ΔBKC – прямоугольные,

$\angle DAC = \angle ACB \Rightarrow \Delta AKD \sim \Delta BKC$,

$$k = \frac{AD}{BC} = \frac{DK}{BK} = \frac{AK}{CK} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AKD}}{S_{\Delta BKC}} = \frac{16}{1}$$

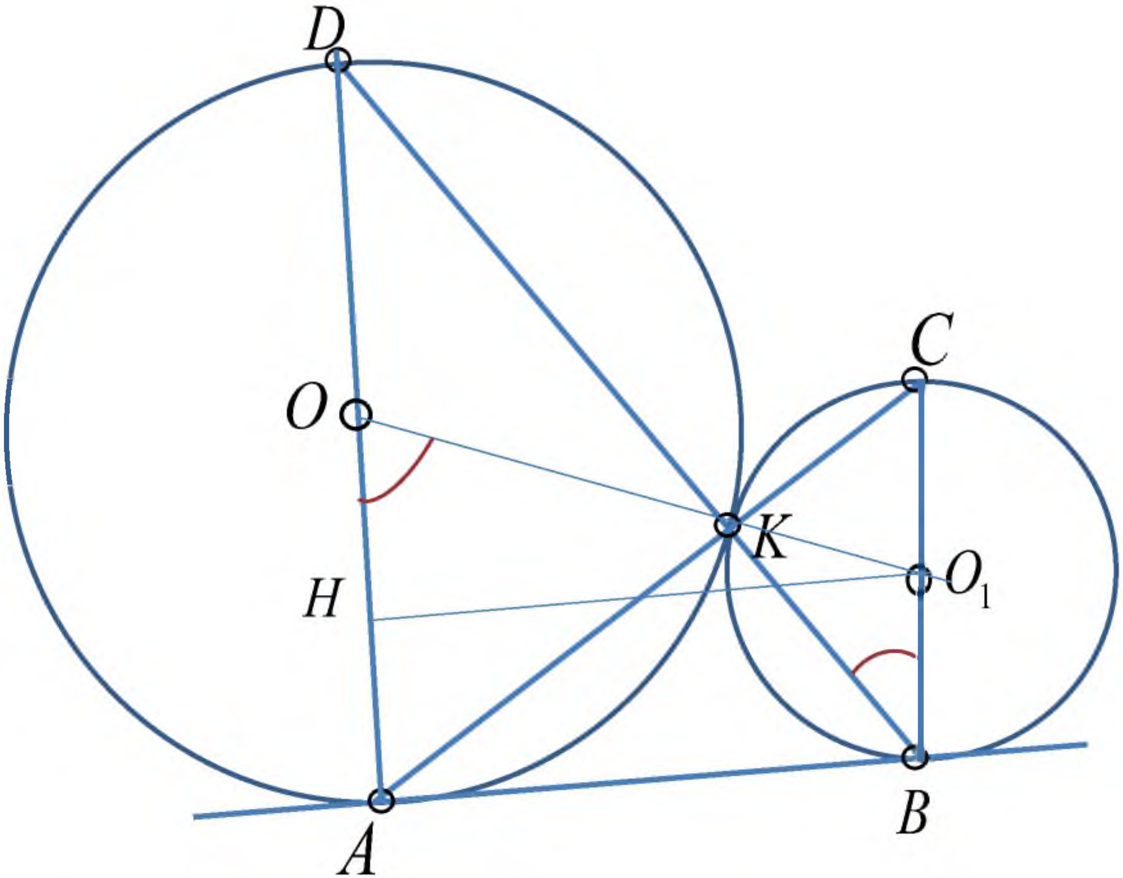




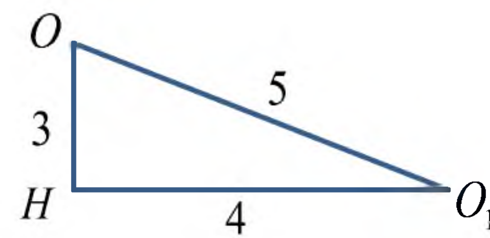
3. Т.к. ΔAKD и ΔAKB имеют общую высоту AK, то $\dfrac{S_{\Delta AKD}}{S_{\Delta AKB}} = \dfrac{DK}{BK} = \dfrac{4}{1}$

4. $S_{\Delta BKC} = S, S_{\Delta BO_1K} = \dfrac{S}{2}, S_{\Delta AKD} = 16S, S_{\Delta AOK} = 8S, S_{\Delta AKB} = 4S$

$$\Rightarrow S_{AOO_1B} = \frac{25S}{2} = \frac{AO + BO_1}{2} \cdot AB = 10 \quad \Rightarrow S = \frac{20}{25} \Rightarrow S_{\Delta AKB} = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$



$$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2} AK \cdot KB$$



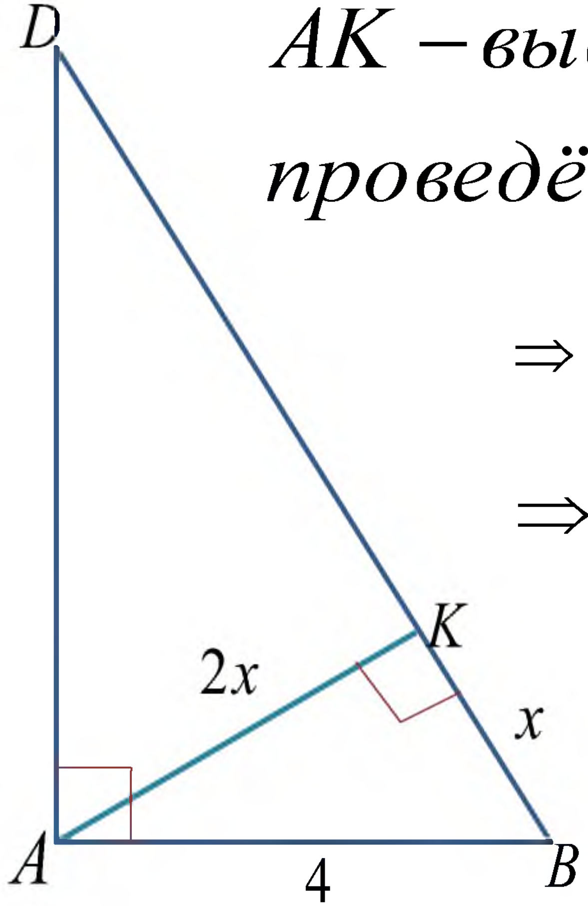
$$\cos\angle O_1OH = \frac{3}{5}$$

$$\cos\angle KO_1B = \cos(180^0 - \angle O_1OH) = -\cos\angle O_1OH = -\frac{3}{5}$$

$$\Delta AOK : AK^2 = AO^2 + OK^2 - 2AO \cdot OK \cdot \cos\angle O_1OH = \frac{64}{5}$$

$$\Delta KO_1B : KB^2 = KO_1^2 + BO_1^2 - 2KO_1 \cdot BO_1 \cdot \cos\angle KO_1B = \frac{16}{5}$$

$$S_{\Delta AKB} = \frac{16}{5}$$



$$AK - \text{высота прямоугольного } \Delta DAB,$$
$$\text{проведённая из вершины прямого угла}$$

$$\Rightarrow \Delta AKD \infty \Delta BKA \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AK}{KB} = \frac{DK}{BK} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow AK = 2KB$$

$$4x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

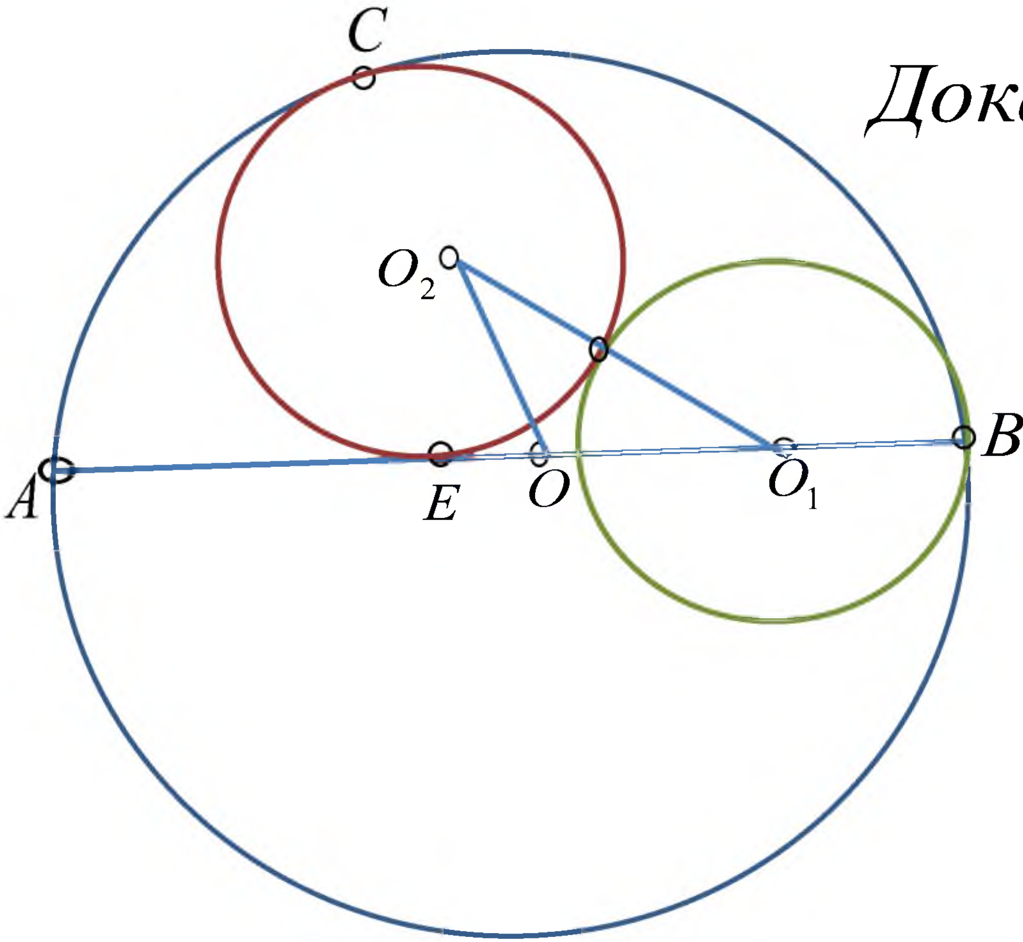
$$KB = \frac{4}{\sqrt{5}};\ AK = \frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{\Delta AKB} = \frac{16}{5}$$

Задача 2

Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1



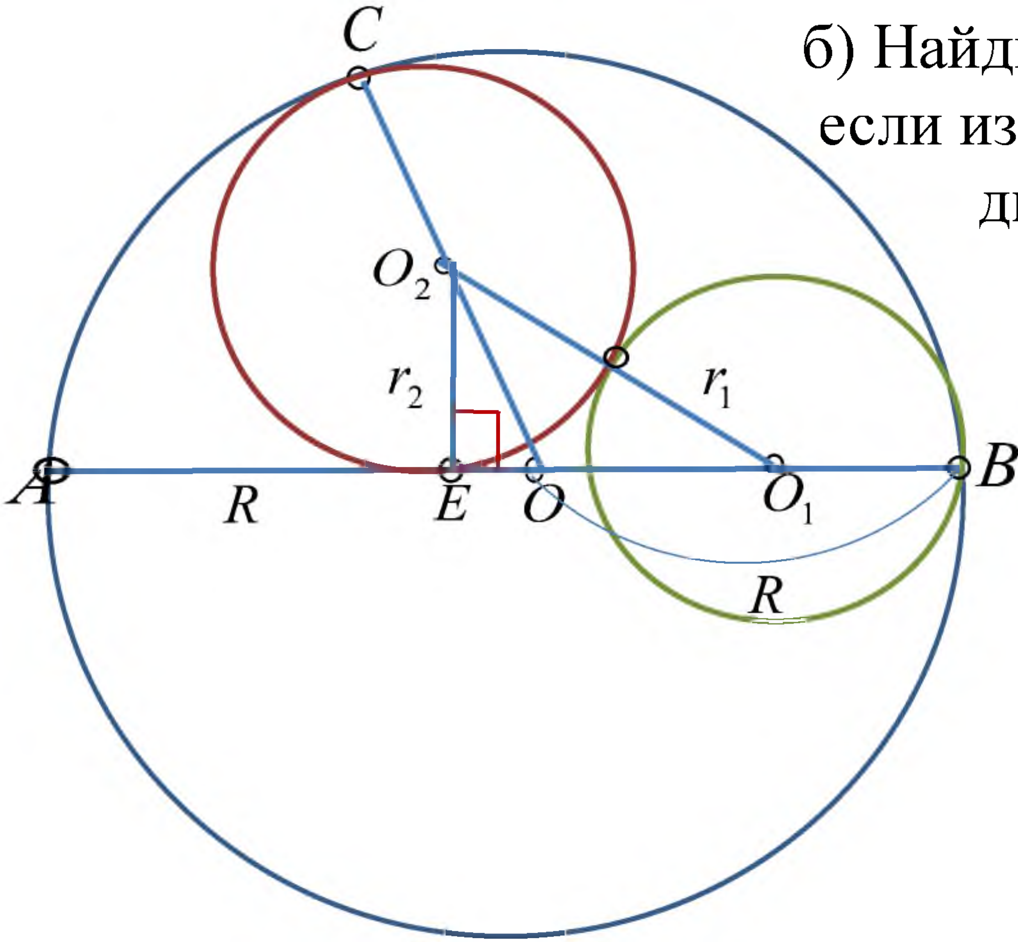
$$Доказать, что\ P_{\Delta OO_1O_2} = 2R$$

Если две окружности касаются, то точка касания лежит на **прямой, соединяющей центры**.

$$AO = OB = R; O_1B = r_1; O_2C = r_2$$

1. $OO_1 = R - r_1$
2. $OO_2 = R - r_2$
3. $O_1O_2 = r_1 + r_2$

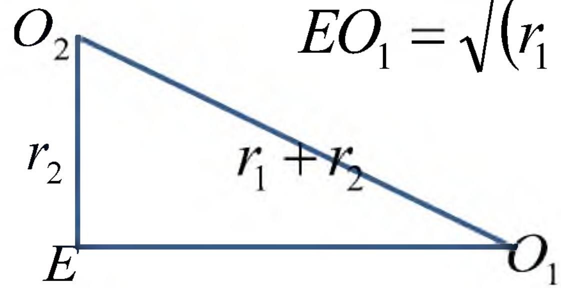
$$P_{\Delta OO_1O_2} = OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = R - r_1 + R - r_2 + r_1 + r_2 = 2R$$



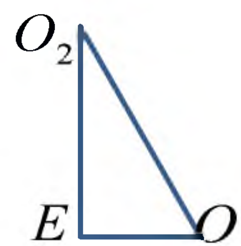
б) Найдите радиус третей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1

$AO = OB = R = 4; O_1B = r_1 = 1;$

$O_2C = r_2 = ?$



$$EO_1 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2}$$



$$EO = \sqrt{(R - r_2)^2 - r_2^2}$$

$$EO = EO_1 - OO_1 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2} - (R - r_1)$$

$$\sqrt{(R - r_2)^2 - r_2^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2} - (R - r_1)$$

$$\sqrt{(4 - r_2)^2 - r_2^2} = \sqrt{(1 + r_2)^2 - r_2^2} - 3$$

$$\sqrt{16 - 8r_2} = \sqrt{1 + 2r_2} - 3$$

$$16 - 8r_2 = 1 + 2r_2 + 9 - 6\sqrt{1 + 2r_2}$$

$$6\sqrt{1 + 2r_2} = 10r_2 - 6$$

$$3\sqrt{1 + 2r_2} = 5r_2 - 3$$

$$9 + 18r_2 = 25r_2^2 - 30r_2 + 9$$

$$25r_2^2 - 48r_2 = 0$$

$$r_2 = \frac{48}{25}$$

Задача 3

Две окружности с центрами O_1 *и* O_2 *пересекаются в точках* A *и* B, *причем точки* O_1 *и* O_2 *лежат по разные стороны от прямой* AB. *Продолжение диаметра* AC *первой окружности и хорды* CB *этой окружности пересекают вторую окружность в точках* D *и* E *соответственно.*

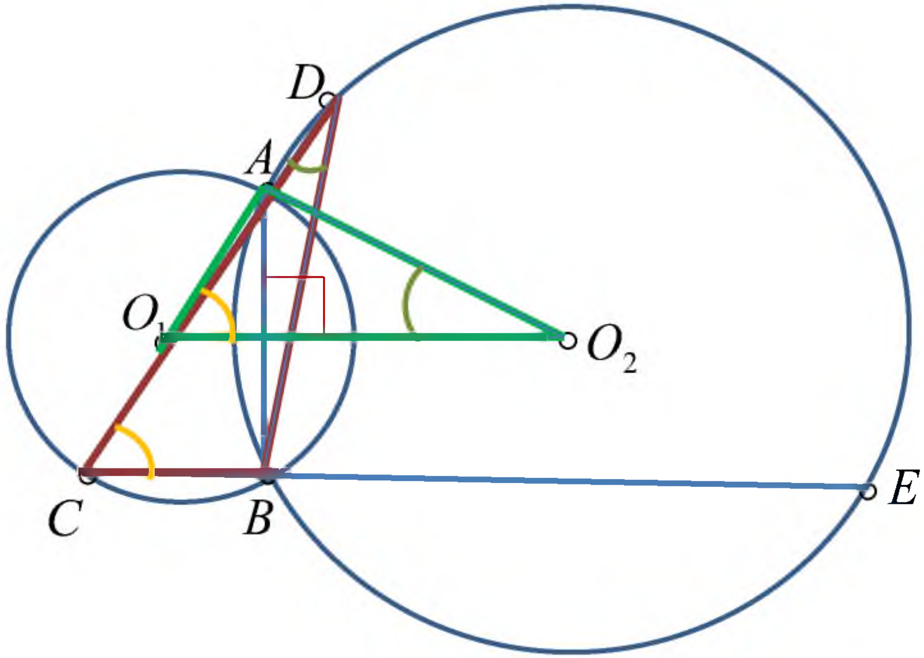
а) Докажите, что треугольники CBD *и* O_1AO_2 *подобны.*

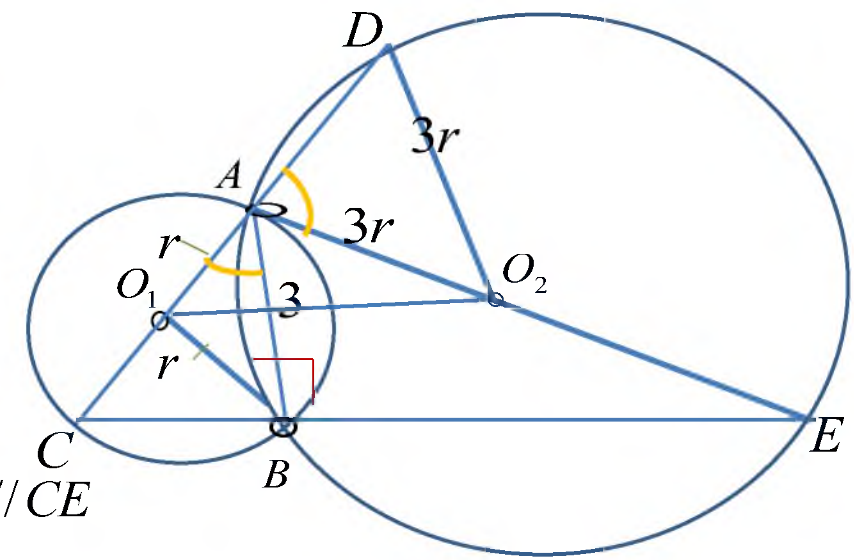
б) Найдите AD, *если* $\angle DAE = \angle BAC$, *радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и* $AB = 3$

$$AB \perp O_1O_2 \Rightarrow \angle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle AO_1B = \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle AO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle AO_2B = \angle ADB$$

а) Докажите, что $\Delta CBD \infty \Delta O_1AO_2$.





$\angle AO_1O_2 = \angle ACB$ *(соответственные)* $\Rightarrow O_1O_2 \,//\, CE$

Т.к. $O_1O_2 \perp AB \Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow \angle ABE = 90^0 \Rightarrow AE$ *– диаметр первой окружности*

б) Найдите AD, *если* $\angle DAE = \angle BAC$, $O_2A = 3O_1A$ *и* $AB = 3$

$$\left.\begin{array}{r} AO_1 = BO_1 = r \Rightarrow \Delta AO_1B - \text{равнобедренный} \Rightarrow O_1AB = \angle O_1BA \\ AO_2 = DO_2 = 3r \Rightarrow \Delta AO_2D - \text{равнобедренный} \Rightarrow O_2AD = \angle O_2DA \\ \angle DAE = \angle BAC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AO_1B \infty \Delta AO_2D$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DO_2}{BO_1} = \frac{AO_2}{AO_1} \Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{3r}{r} \Rightarrow AD = 9$$